

APUNTES DE MATEMÁTICAS OLÍMPICAS

Equipo Torneo El Número de Oro

Santiago de Chile
Edición 2009

Prólogo

Estos Apuntes de Matemática Olímpica no son para los que no les gusta la matemática. Tampoco son para los que les gusta la matemática. Ni siquiera son para aquellos que tienen ciertas habilidades formales en la disciplina.

Si está en alguno de los casos anteriores, le sugerimos que no siga leyendo.

Son para aquellos apasionados por la matemática y que tienen destrezas especiales, o que al menos tienen el interés, la vocación y la disciplina para desarrollar esas habilidades.

Por otra parte, su orientación es la de proporcionar a quien los estudia - nótese que expresamente evité decir a quien los lee - herramientas apropiadas para enfrentar certámenes de alto nivel competitivo, como son las olimpiadas de matemática.

No busque por ello, quien lo abra, aplicaciones de la matemática a la vida cotidiana, o ejemplos que esclarezcan uno u otro concepto: se sentirá decepcionado.

Esta publicación es una colección valiosa y bella - para quienes entiendan lo que puede ser la belleza de una expresión matemática o la estética de un corolario geométrico - de teoremas, demostraciones, propiedades matemáticas, problemas resueltos y problemas propuestos que recorren la Teoría de Números, el Álgebra, la Geometría, la Combinatoria y otros temas afines.

Quien no comparta este lenguaje y estas vivencias, encontrará que se trata de un documento árido y sin sentido. Y tendría razón desde su punto de vista.

Por el contrario, algunos pocos - que esperamos que sean progresivamente más y más - gozarán con la Aritmética Modular y las propiedades aparentemente caprichosas de los números; sonreirán ante una elegante demostración geométrica concebida en la antigua Grecia; disfrutarán de la potencia del Principio de Inducción Matemática y de las Sumatorias Telescópicas; se asombrarán frente a la formulación del Principio del Palomar o de las insospechadas aplicaciones de la Teoría de Grafos.

Más allá de todo lo expresado, este libro es otro testimonio más que indica que Universidad de Las Américas ha hecho de la matemática una preocupación (o más bien, una ocupación) cuasi obsesiva, en múltiples niveles. Ha desarrollado y aplicado metodologías para el aprendizaje de los conceptos más básicos de la matemática elemental; ha instalado laboratorios para su ejercitación y ha abierto un espacio a los jóvenes que la cultivan, haciendo de ella motivo de profunda afición y fuente de sofisticada diversión.

Los Apuntes de Matemática Olímpica serán para estos últimos, un texto de referencia; un documento de estudio y reflexión; y en algunos casos, un objeto de culto. Para todos, un hito ineludible en su preparación para la competencia.

Nuestras felicitaciones y reconocimiento para aquellos que lo concibieron, lo editaron y lo pusieron a disposición del talento joven.

Nuestros mejores deseos de éxito para aquellos que emprenderán la aventura de resolver ingeniosos y complicados ejercicios a la par con los más dotados del mundo.

El sólo hecho de haber llegado hasta aquí, los honra, los convierte en modelos para sus pares, enorgullece a sus padres, a sus maestros y al país.

Va para ellos nuestro saludo y admiración.

Roberto Hojman
Vicerrector Académico
Universidad de Las Américas

Santiago de Chile, Octubre de 2009.

Presentación

Chile cuenta con excelentes alumnos para competir en los torneos de matemáticas, tanto a nivel nacional como internacional, sin embargo, los que en el país obtienen buenos resultados como medallas de oro en la Olimpíada Nacional, cuando compiten con alumnos de otros países sus logros son más bien escasos. Estamos convencidos que entre las causas de esta situación se encuentran: la falta de entrenamientos constantes y sistemáticos y de talleres de Matemáticas en los colegios, que redunda en que la mayoría de los alumnos no entrena y los que lo hacen tienen sólo un par de horas de dedicación a la semana, la falta de material de apoyo, ya que no hay libros con los contenidos de las pruebas olímpicas de matemáticas, además que el poco material que se puede conseguir no está al alcance de la mayoría y quien tiene la posibilidad de conseguir algún texto lo reserva para sí.

El apunte que ponemos en sus manos, pretende aportar con un granito de arena a la preparación de los jóvenes que participan este año en la segunda versión del Torneo de Matemáticas "El Número de Oro", que realizamos con Universidad de Las Américas. Aquí encontrarán una recopilación de problemas que buscan desarrollar las habilidades de quienes quieran ocuparlo; resolvimos algunos y dejamos propuestos otros, con una pincelada de la base teórica necesaria.

El texto es el producto de un trabajo extraordinario realizado con entusiasmo y cariño por un equipo de jóvenes con experiencia en matemáticas olímpicas y mucho interés en difundir la práctica de esta actividad. Agradecemos a Estefanía Vidal Henríquez, Sebastián Henríquez Acosta, Víctor Verdugo Silva y Rodrigo Chi Durán, hoy estudiantes del Plan Común de Ingeniería en la Universidad de Chile; a Andrés Iturriaga Jofré, egresado de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad de Chile, todos con meritoria trayectoria olímpica. Ellos destinan parte de su tiempo libre al entrenamiento de jóvenes estudiantes para competencias olímpicas. Alumnos avanzados y destacados olímpicos como Aníbal Velozo Ruiz del Instituto Alonso de Ercilla y Sebastián Illanes Carrasco del Instituto Nacional, han sido también valiosos colaboradores.

En forma muy especial queremos agradecer a Daniel Contreras Salinas, estudiante de segundo año medio del Instituto Nacional y destacado competidor olímpico, por su entrega a este trabajo con un valioso aporte en Geometría para lo que puso a prueba modernos programas computacionales que ayudaron a que el texto resultase mejor. A Felipe Contreras Salinas, estudiante de cuarto año medio del Instituto Nacional y destacado competidor olímpico, por su responsabilidad en la edición general de este Apunte, por su paciencia en la corrección de contenidos y ordenamiento de los temas, claves para el cumplimiento de nuestro objetivo.

A las autoridades y funcionarios de Universidad de Las Américas, que creyeron en nuestro proyecto y nos abrieron las puertas de esta Casa de Estudios para realizarlo, y que han puesto entusiasmo para que se concretaran los aportes materiales para la realización de entrenamientos sistemáticos y para la realización del segundo Torneo de Matemáticas “El Número de Oro”.

Mención aparte para Marianela Palma Guzmán, amiga de muchos años, por la confianza que infundió siempre, que todo esto debe ser posible, por su convicción de que se lo debemos a los jóvenes como sociedad y como país. Esta edición 2009 está dedicada a todos ellos.

Juan Contreras Garrido
Presidente ONG Educacional El Número de Oro
www.elnumerodeoro.cl

Santiago, octubre de 2009

Indice

Capítulo 1

Teoría de Números

La Teoría de Números es la rama de las Matemáticas puras que estudia las propiedades de los números en general, y de los enteros en particular, así como diversos problemas derivados de su estudio. Lo más maravilloso de esta rama es que contiene un sinnúmero de problemas que podrían ser comprendidos por *"no matemáticos"*.

1.1. Problemas Introductorios

Antes de leer todo el material es muy buen ejercicio intentar resolver problemas elementales sólo con lo que se tiene y con mucho ingenio. Los siguientes problemas son variaciones de clásicos.

Propuesto 1. *Muestre que si seleccionamos* 18 *naturales de* 3 *dígitos consecutivos, al menos uno es divisible por la suma de sus dígitos.*

Propuesto 2. *¿Existe una potencia de* 2 *tal que al reordenar sus dígitos se obtiene otra potencia de* 2*?*

Propuesto 3. *Encuentre todos los valores de* j *tales que* $3j-4$, $4j-5$ *y* $5j-3$ *son números primos.*

Propuesto 4. *a) Encuentre* 20 *números compuestos consecutivos.*

b) Encuentre n $(n \in \mathbb{N})$ *números compuestos consecutivos.*

Propuesto 5. *Demuestre que la suma de los cuadrados de cinco enteros consecutivos no es un cuadrado.*

1.2. Divisibilidad

Diremos que $a|b$ (a divide a b) si y sólo si existe un j entero tal que $b = a \cdot j$, entonces tenemos que a es un factor o divisor de b. Notar que $0 = j \cdot 0$, entonces $j|0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Por otro lado, si no existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot j$ se dice $a \nmid b$ (a no divide a b).

Propiedades Básicas

*Es buen ejercicio demostrar las propiedades básicas, no es complicado.

1. $a|a$ (Propiedad refleja)
2. Si $a|b$ y $b|c \Rightarrow a|c$ (Propiedad transitiva)
3. Si $a|b$ y $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$
4. Si $a|b$ y $a|c \Rightarrow a|\beta b + \gamma c\,,\ \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$
5. Si $a|b$ y $a|b \pm c \Rightarrow a|c$
6. Si $a|b$ y $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
7. Si $a|b$ y $b \neq 0 \Rightarrow \frac{b}{a}|b$
8. Si $c \neq 0$, $a|b \Leftrightarrow ac|bc$
9. Si $MCD(a, b) = 1$ y $a|bc \Rightarrow a|c$

Técnicas usadas en Olimpíadas

1.- Si $d|a \Rightarrow d|a + dj,\ \forall j \in \mathbb{Z}$

Problema (Básico)**.** *Encuentre todos los* $n \in \mathbb{Z}$ *tales que* $4n + 2|5n + 1$.

Solución:

$$4n+2|5n+1 \Rightarrow 4n+2|4(5n+1)-5(4n+2) \Rightarrow 4n+2|-6$$

Ahora tenemos que $4n+2$ es divisor de -6, o sea su valor puede ser $-6,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 6$. Ahora basta con evaluar.

$4n+2=-6 \Rightarrow n=-2$
$4n+2=-3 \Rightarrow n=-\frac{5}{4}$
$4n+2=-2 \Rightarrow n=-1$
$4n+2=-1 \Rightarrow n=-\frac{3}{4}$
$4n+2=1 \Rightarrow n=-\frac{1}{4}$
$4n+2=2 \Rightarrow n=0$
$4n+2=3 \Rightarrow n=\frac{1}{4}$
$4n+2=6 \Rightarrow n=1$

Dejando sólo las soluciones enteras y evaluando en el enunciado se tiene $n=-1,\ 1$.

Problema (Medio)**.** *Pruebe que la fracción* $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ *es irreductible para todo natural* n. *(IMO 1959)*

Solución:

Notemos que $2(21n+4)-3(14n+3)=-1$. Si $\frac{21n+4}{14n+3}$ fuera reductible, entonces $21n+4$ y $14n+3$ tendrían un divisor común, digamos d.
Luego $21n+4=da_1$ y $14n+3=da_2$, entonces $2(21n+4)-3(14n+3)=-1=2da_1-3da_2=d(2a_1-3a_2)=-1$.
Finalmente $d|-1$, o sea la fracción es irreductible.

Problema (Avanzado)**.** *Sean* $a,\ b$ *naturales. Demuestre que si* $4ab-1|(4a^2-1)^2$, *entonces* $a=b$.

(IMO 2007)

Solución:

$$4ab-1|(4a^2-1)^2 \Rightarrow 4ab-1|b^2(4a^2-1)^2-(4ab-1)(4a3b-2ab+a^2)=(a-b)^2$$

Asumamos que existen dos naturales distintos $a,\ b$ tales que $4ab-1|(a-b)^2$. Sea $k=\dfrac{(a-b)^2}{4ab-1}>0$. Fijemos k y sea

$$S = \left\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k\right\}$$

Sea (A,B) un par de S que minimice la suma $a+b$ sobre todos los $(a,b) \in S$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $A > B$. Consideremos ahora la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{(x-B)^2}{4xB-1} = k, \text{ o sea } x^2 - (2B+4kB)x + B^2 + k = 0$$

Donde sus raíces son $r_1 = A$ y r_2. Por las relaciones de Cardano-Vieta[1] se tiene:

$$r_2 = 2B + 4kB - A = \frac{B^2+k}{A}$$

Lo que implica que r_2 es un natural, o sea, $(r_2, B) \in S$.

Por la minimalidad de $A+B$ tenemos que $r_2 \geq A$, o sea

$$\frac{B^2+k}{A} = A \Rightarrow k \geq A^2 - B^2$$

Luego:

$$\frac{(A-B)^2}{4AB-1} \geq A^2 - B^2$$

O sea:

$$A - B \geq A + B(4AB-1) \geq (A+B) \rightarrow\leftarrow$$

Por lo tanto no existen a y b distintos tales que $4ab-1|(4a^2-1)^2$, o sea que $4ab-1|(4a^2-1)^2 \Rightarrow a = b$.

[1]ver Capítulo de Álgebra

2.- Si $a|b$ y $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Problema (Básico-Medio). *Sean a y b números naturales tales que b^2+ba+1 divide a a^2+ab+1, pruebe que $a=b$.*

(Leningrado 1990)

Solución:

$$b^2+ba+1|a^2+ab+1 \Rightarrow b^2+ba+1|b(a^2+ab+1)-a(b^2+ba+1) \Rightarrow b^2+ba+1|b-a$$

Si $b > a \Rightarrow b-a \geq b^2+ba+1$ lo que es absurdo.
Si $a > b \Rightarrow a-b \geq b^2+ba+1$ lo que es absurdo.
Luego $a=b$.

Problema (Avanzado). *Determine todos los pares de naturales (x,y) tales que $xy^2+y+7|x^2y+x+y$.*

(IMO 1998)

Solución:

$$xy^2+y+7|x^2y+x+y \Rightarrow xy^2+y+7|x(xy^2+y+7)-y(x^2y+x+y) \Rightarrow xy^2+y+7|7x-y^2$$

De acá salen tres casos, $y^2 \geq 7x$, $y^2=7x$ y $7x > y^2$.

- $y^2 > 7 \Rightarrow y^2-7x \geq xy^2+y+7$ lo cual es absurdo.
- $y^2=7$ nos da los pares $(7j^2,7j), \forall j \in \mathbb{N}$.
- $7x > y^2 \Rightarrow 7x-y^2 \geq xy^2+y+7$, supongamos que $y \geq 3 \Rightarrow 7x-9 \geq 7x-y^2 \geq xy^2+y+7 \geq 9x+10 \rightarrow\leftarrow$. Luego $y \leq 2$.

  Si $y=1$ entonces $x+8|x^2+x+1 \Rightarrow x+8|x^2+x+1-(x+7)(x+8) \Rightarrow x+8|57$, luego $x+8$ es $-57,-19,-3,-1,1,3,19,57$. Como x es natural $x+8$ es 19 o 57, entonces $x \in \{11,49\}$.

  Si $y=2$ entonces $4x+9|7x-4 \Rightarrow 7(4x+9)-4(7x-4) \Rightarrow 4x+9|79$, luego $4x+9$ es $-79,-1,1,79$, pero como $4x+9$ es positivo $4x+9=79 \Rightarrow x=\frac{35}{2} \rightarrow\leftarrow$.

  Por lo tanto los pares son $(7j^2,j)_{j\in\mathbb{N}}, (11,1)$ y $(49,1)$.

Propuesto 1. *Sea A un número natural mayor que 1 sea B un número natural que es divisor de A^2+1. Demuestre que $B-A>0 \Rightarrow B-A>\sqrt{A}$.*

(Leningrado 1989)

3.- Si $a\|b$ y $b\|a \Rightarrow \|a\|=\|b\|$

Problema (Medio)**.** *Sean $a,\ b,\ c$ enteros distintos y P un polinomio de coeficientes enteros. Demuestre que es imposible que $P(a)=b,\ P(b)=c$ y $P(c)=a$.*

(USAMO 1974)

Solución:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a>b>c$. Notemos que [2]:

$$b \equiv c \pmod{b-c} \Rightarrow P(b) \equiv P(c) \pmod{b-c} \Rightarrow a \equiv b \equiv c \pmod{b-c}$$

$$a \equiv c \pmod{a-c} \Rightarrow P(a) \equiv P(c) \pmod{b-c} \Rightarrow a \equiv b \equiv c \pmod{a-c}$$

Esto ya que P tiene coeficientes enteros.

Entonces tenemos:

$$\begin{array}{l} a-c \equiv 0 \pmod{b-c} \\ b-c \equiv 0 \pmod{a-c} \end{array} \Rightarrow |a-c| = |b-c|$$

Como $a-c>0$ y $b-c>0$ entonces $a-c=b-c \Rightarrow a=b \rightarrow\leftarrow$.

4.- Si x es coprimo con $x_1x_2\ldots x_n$ entonces x es coprimo con x_1, x es coprimo con x_2,... x es coprimo con x_n.

Problema (Medio)**.** *Sea $a>1$ un entero. Pruebe que el conjunto $A=\{a^2+a-1, a^3+a^2-1, \ldots, a^{n+1}+a^n-1\}$ tiene un subconjunto infinito tal que cualquiera dos elementos de él son coprimos.*

(Rumania, IMO Selection Test 1997)

[2]para entender notación ver sección de Aritmética Modular

Solución:

Sea inicialmente $B = \{a^2 + a - 1\}$, demostraremos que a este conjunto siempre podemos agregrale otro elemento de la forma $a^{n+1} + a^n - 1$ que sea coprimo con todos los elementos del conjunto.

Sea P el producto de todos los elementos de B, notemos que P y a son coprimos, pues los elementos de B son antecesores de múltiplos de a. Por lo anterior [3] existe un j tal que $a^j \equiv 1 \pmod{P}$, o sea $a^{j+1} + a^j - 1 \equiv a \pmod{P}$, luego si $a^{j+1} + a^j - 1$ y P tuvieran algún divisor en común, entonces también sería divisor de a, pero como a y P son coprimos, entonces $a^{j+1} + a^j - 1$ y P son coprimos. Lugo $a^{j+1} + a^j - 1$ es coprimo con todos los elementos de B.

1.3. Aritmética Modular

Diremos que $x \equiv y \pmod{m}$ (x es congruente a y en módulo m) si $m|x - y$. De esta manera se concluye que $x - y = mk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, osea $x = y + mk$.

Propiedades:

1. $a \equiv a \pmod{m}$ (Propiedad refleja)

2. $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$ (Propiedad recíproca)

3. Si $x \equiv y \pmod{m}$ y $y \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x \equiv z \pmod{m}$ (Propiedad transitiva)

4. Si $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow ax \equiv ay \pmod{m} \forall\, a \in \mathbb{Z}$

5. Si $MCD(a, m) = 1$ y $ax \equiv ay \pmod{m} \Rightarrow x \equiv y \pmod{m}$

6. Si $x \equiv y \pmod{m}$ y $w \equiv z \pmod{m} \Rightarrow x + w \equiv y + z \pmod{m}$

7. Si $x \equiv y \pmod{m}$ y $w \equiv z \pmod{m} \Rightarrow xw \equiv yz \pmod{m}$

---

[3] ver pág. 14

De todas estas propiedades demostraremos sólo las 3, 5 y 7, dejando las restantes al lector.

Propiedad 3.- Como $x = y + mk_1,\ y = z + mk_2$ para algunos $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$. Luego $y = x - mk_1$, reemplazando en la segunda igualdad: $z + mk_2 = x - mk_1 \Rightarrow x = z + m(k_1 + k_2)$. De la definición se sigue que $x \equiv z \pmod{m}$.

Propiedad 5.- Como $ax \equiv ay \pmod{m} \Rightarrow m|ax - ay = a(x - y)$, como $MCD(a, m) = 1 \Rightarrow m|x - y$ concluyendo lo pedido.

Propiedad 7.- Existen $k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x = y + mk_1$ y $w = z + mk_2$, multiplicando estas igualdades:

$$\begin{aligned} xw &= (y + mk_1)(z + mk_2) \\ &= yz + m(k_1 z + k_2 y + mk_1 k_2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow xw \equiv yz \pmod{m}$.

Por el Algoritmo de División de Euclides $\forall$ a, m$\in \mathbb{Z}, \exists$ r, q$\in \mathbb{Z}(m > r \geq 0)$ tales que $a = mq + r$. O sea, $a \equiv r \pmod{m}$. Queda claro que a cada entero a se le asocia un único entero $r \in [0, m)$ como su equivalente en módulo m. Se define como $[x] = \{x + mt | t \in \mathbb{Z}\}$ (Esta es la 'Clase residual de x en módulo m').

Claramente si $x \equiv y \pmod{m} \Rightarrow [x] = [y]$.

Se define como $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], [2], \ldots, [m-1]\}$, al conjunto total de clases.

Probablemente la mayor utilidad de trabajar en $\mathbb{Z}_n$ en vez de $\mathbb{Z}$ es que las ecuaciones diofánticas pasan de tener infinitas soluciones a tan sólo finitas.

Problema. *Encuentre todos los primos p para los cuales $p^2 + 11$ tiene exactamente 6 divisores distintos, incluyendo 1 y $p^2 + 11$.*

(Rusia 1995)

Solución:

Notemos que $x^2 \equiv 0 \pmod{3} \vee x^2 \equiv 1 \pmod{3}$

(Si $x \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod{3}$, Si $x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod{3}$, Si $x \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow x^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$)

- **Caso 1:** $p = 2 \Rightarrow p^2 + 11 = 15$, donde sus divisores son $1,\ 3,\ 5,\ 15$. O sea no cumple lo pedido.

- **Caso 2:** $p = 3 \Rightarrow p^2 + 11 = 20$, donde sus divisores son $1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20$. O sea cumple lo pedido.

- **Caso 3:** $p > 3 \Rightarrow p \equiv 0, 1 \pmod 3 \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod 3$, de donde se sigue que $p^2 + 11 \equiv 0 \pmod 3$.

  Luego 3 es un divisor de $p^2 + 11$.

  Por otra parte p es impar, entonces p^2+11 es par. Luego 2 es divisor de p^2+11.

  Finalmente $6|p^2+11$. Luego tenemos que $1,\ 2,\ 3,\ 6,\ \frac{p^2+11}{6},\ \frac{p^2+11}{3},\ \frac{p^2+11}{2},\ p^2+11$ son divisores de $p^2 + 11$, desde ya una cantidad mayor que 6.

Por lo tanto, el único p es 3.

Definición (Función φ de Euler)**.** Se define la función $\varphi(n)$ como la cantidad de naturales menores a n que son coprimos con éste.

Propiedades:

1. Si $MCD(m, n) = 1$, entonces $\varphi(m) \cdot \varphi(n) = \varphi(mn)$.
2. Si p es primo, entonces $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.
3. Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, entonces $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

La demostración de estas propiedades queda propuesta al lector.

Teorema de Euler. *Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $MCD(x, m) = 1$*

Se tiene que $x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Demostración:

Sean $a_1,\ a_2, \dots,\ a_{\varphi(m)}$ los números coprimos con m menores a éste.

El conjunto $\{xa_1,\ xa_2, \dots,\ xa_{\varphi(m)}\}$ (donde $MCD(x, m) = 1$) es el mismo que $\{a_1,\ a_2, \dots,\ a_{\varphi(m)}\}$ en módulo m ya que xa_i es coprimo con m, $\forall i < \varphi(m) \in \mathbb{N}$ y

$xa_i \not\equiv xa_j \pmod{m}$ si $i \neq j$. Luego:

$$xa_1 \cdot xa_2 \cdot \dots \cdot xa_{\varphi(m)} \equiv a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{\varphi(m)} \pmod{m}$$
$$\Rightarrow x^{\varphi(m)} \cdot (a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)}) \equiv (a_1 a_2 \dots a_{\varphi(m)}) \pmod{m}$$
$$\Rightarrow x^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m} \text{ (recordar que } \prod_{i=1}^{\varphi(m)} a_i \text{ es coprimo con } m)$$

Corolario (Pequeño Teorema de Fermat)**.** Sea p un primo, se tiene que $x^p \equiv x \pmod{p}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$. Si x es coprimo con $p \Rightarrow x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ahora introduciremos un concepto no tan conocido pero muy útil, el orden de un número en algún módulo.

Se define como *"orden de a en módulo m"* al número $d = ord_n a$ tal que es el menor natural que cumple:

$$a^d \equiv 1 \pmod{n} \text{ (donde } MCD(a, n) = 1)$$

Es claro que ese número existe, como vimos $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ así que en el peor de los casos $d = \varphi(n)$.

Algo que es importante ver es que si $a^x \equiv 1 \pmod{n} \Rightarrow d|x$.

Demostración:

Sea $x = d \cdot q + r,\ d > r \geq 0$
$\Rightarrow 1 \equiv a^x \equiv a^{dq+r} \equiv \left(a^d\right)^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}$
$\Rightarrow a^r \equiv 1 \pmod{n}$ donde $d > r \geq 0$, si $r \neq 0$ se contradice la definición de d. Luego $r = 0$, o sea, $d|x$.

Problema. *Demostrar que existen infinitos n tales que todo divisor de $2^n - 1$ sea mayor que n (excluyendo a la unidad).*

(Rioplatense 1997)

Solución:

Demostraremos que todo n primo cumple lo pedido.

Sea q el menor divisor de $2^n - 1$ (claramente q es primo impar) $\Rightarrow 2^n - 1 \equiv 1 \pmod{q}$.

Sea $d = ord_q 2 \Rightarrow d|n$, como n es primo $\Rightarrow d = 1 \vee d = n$.

- $d = 1 \Rightarrow 2 \equiv 1 \pmod{q} \longrightarrow\longleftarrow$
- $d = n$ Como $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q} \Rightarrow d = n|q-1$

  Finalmente, como $p|q-1 \Rightarrow p \leq q-1 \Rightarrow p < p+1 \leq q$, demostrando lo pedido.

Definición (Inverso)**.** Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $MCD(a,n) = 1$, entoces existe un elemento de $\mathbb{Z}$ conocido como el inverso de a a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

La demostración se basa en la Identidad de Bezout que afirma que $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$
$\exists$ x, y$\in \mathbb{Z}$ tales que $ax + by = MCD(a,b)$

Teorema de Wilson. *Si p es primo, entonces* $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

Demostración:

Sea $\mathbb{Z}_p* = \{1,\ 2, \ldots,\ p-1\}$

Notemos que si $a \in \mathbb{Z}_p* \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{Z}_p*$

Hay dos casos, cuando $a = a^{-1} \Rightarrow a \cdot a^{-1} = a^2 \equiv 1 \pmod{p}$
$\Rightarrow (a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a \equiv \pm 1 \pmod{p}$, luego $a = 1, p-1$

El otro caso es cuando $a \neq a^{-1}$.

En el producto $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)$ aparecen las parejas de inversos, excepto del -1 y de 1 porque son ellos mismos. Además cada elemento en el producto aparece solo una vez, luego se concluye que

$$1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot -1 \equiv -1 \pmod{p}, \text{ demostrando lo pedido.}$$

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Encontrar todas las soluciones enteras positivas de* $1 + 2^x + 3^y = z^3$

(Rioplatense 2000)

Propuesto 2. *¿Existen enteros x, y tales que* $3x^2 - 2y^2 = 1998$*?*

(Bielorusia 1998)

Propuesto 3. *Encuentre todos los enteros positivos para los cuales* $7^x - 3^y = 4$.

Propuesto 4. *Sea* $p \geq 3$ *un primo. Sea* $\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{p-1}$ *donde* $\frac{m}{n}$ *es una fracción irreducible. Demostrar que* $p^2|m$.

(Teorema de Wolstenholme)

Propuesto 5. *Encontrar todos los naturales* $m, n \geq 2$ *tales que*

$$\frac{1 + m^{3^n} + m^{2 \cdot 3^n}}{n} \text{ es un entero.}$$

(Bulgaria 1997)

Propuesto 6. *Sean* A *y* n *dos naturales mayores que* 1. *Sea* S *la cantidad de números menores que* $A^n - 1$ *coprimos con éste.*

Probar que $n|s$

(Lenmingrado 1990)

1.4. Residuos Cuadráticos

Esta herramienta en aritmética modular surge al estudiar los cuadrados en módulos primos, para esto introduciremos la notación de Legendre.

Se dice que a es residuo cuadrático modulo p si $x^2 \equiv a \pmod{p}$ tiene solución.

$$\text{Se define } \left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \nmid a \text{ y } a \text{ es residuo cuadrático} \\ -1 \text{ si } p \nmid a \text{ y } a \text{ no es residuo cuadrático} \\ 0 \text{ si } p|a \end{cases}$$

Una propiedad fundamental es la siguiente:

Proposición (Criterio de Euler)**.** $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$

De esto se sigue una propiedad importantísima.

$$\left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right)$$

Además como se puede ver fácilmente si $a \equiv b$, entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.

Problema. *Probar que* $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0$

Solución:

Es equivalente a probar que hay $\frac{p-1}{2}$ residuos cuadráticos en $\mathbb{Z}$. Consideremos que $x^2 \equiv y^2 \pmod{p} \Leftrightarrow x \equiv \pm y \pmod{p}$. Ahora si consideramos el conjunto

$$\{1,\ 2,\ 3, \ldots,\ \frac{p-1}{2},\ \frac{p+1}{2}, \ldots,\ p-1\}$$

Al elevar al cuadrado cada elemento vamos a tener un conjunto de $\frac{p-1}{2}$ elementos distintos porque cada residuo cuadrático aparece exactamente dos veces en $\mathbb{Z}_p*$. Con esto se concluye lo pedido.

Teorema de la Reciprocidad Cuadrática. *Sean* p, q *primos impares, luego se tiene que*

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

No presentaremos demostración porque requiere de algunos resultados previos que no nos serán de utilidad.

Problema. *Demostrar que* $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ *tiene solución si y sólo si* $p \equiv 1 \pmod{4}$ *(donde* p *es primo impar).*

Solución:

Se nos pide demostrar que $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$.

Por Criterio de Euler, tenemos que $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right) \pmod{p} \Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right)$.

Luego $\frac{p-1}{2}$ es par $\Rightarrow \frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow p - 1 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$.

Finalmente, $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$ para $p \equiv 1 \pmod{4}$ y -1 en caso contrario.

Problema. *Demostrar que la ecuación*

$$x^2 - 19y^2 = -1 \text{ no tiene soluciones enteras.}$$

Solución:

Ocupando módulo 19, $x^2 \equiv -1 \pmod{19}$. Como 19 es un primo de la forma $4k+3$, entonces $\left(\frac{-1}{19}\right) = -1$, algo contradictorio porque x cumple la ecuación. Finalmente no hay soluciones.

Problemas Propuestos:

Propuesto 1. *Demostrar que la ecuación* $x^2 - dy^2 = -1$ *no tiene soluciones si existe* p *primo tal que* $p \equiv 3 \pmod{4}$ *y* $p|d$.

Propuesto 2. *Resolver la ecuación* $x^2 - y^3 + 1 = (4z+2)^3$.

Propuesto 3. *Probar que la ecuación* $4xy - x - y = z^2$ *no tiene soluciones naturales.*

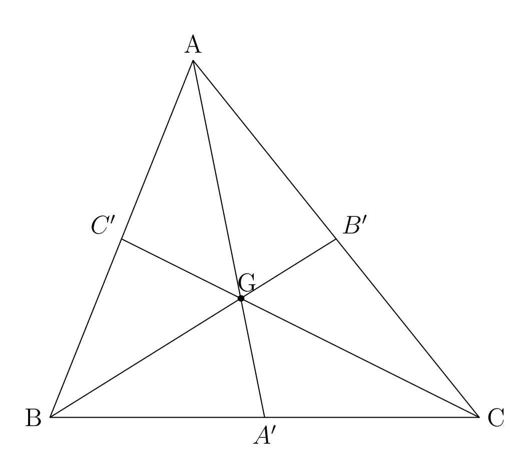
(Propuesto para IMO 1984)

Propuesto 4. *Resolver en los enteros la ecuación* $x^2 = y^z - 3$ *para* $z - 1$ *divisible por* 4.

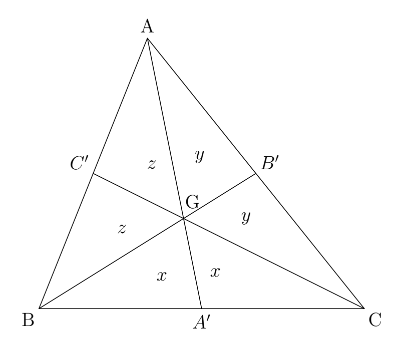
Capítulo 2

Geometría

2.1. Puntos y líneas notables en un triángulo



Las *Transversales de Gravedad* en un triángulo, se definen como los segmentos que van desde un vértice del triángulo al punto medio del lado opuesto. Digamos que las transversales BB' y CC' se cortan en punto llamado G, ahora demostraremos que AA' también pasa por G. Prolongemos AG hasta un punto A'' tal que $2AG = AA''$. Tenemos que $BG \parallel CA''$ ya que $AG = GA''$ y $AB' = B'C$. Análogamente $CG \parallel BA''$. Por lo tanto $ABA''C$ es paralelógramo. Entonces sus diagonales se dimidian, o sea GA'' corta a BC en A'. Por lo tanto las transversales de gravedad concurren en un punto que llamaremos *Baricentro* o *Centro de Gravedad*.



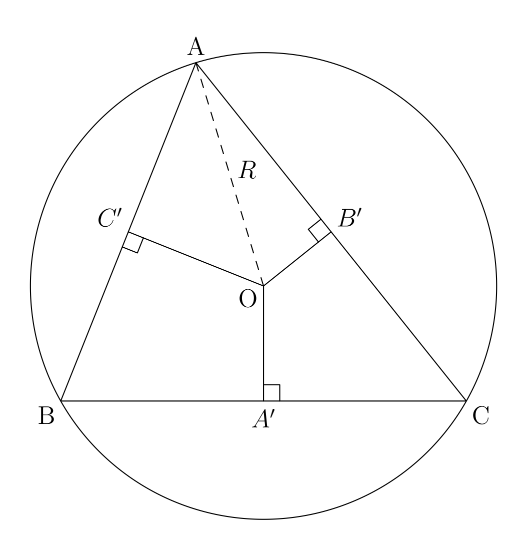
En la figura podemos ver que $(GBA') = (GA'C)$, porque los triángulos tienen bases iguales y la misma altura. Por esta razón , tenemos $(GCB') = (GB'A)$ y $(GAC') = (GC'B)$

Sin embargo, también tenemos que $(CAC') = (CC'B)$, o sea, $2y + z = z + 2x$, de ahí que $x = y$. Análogamente, $(ABA') = (AA'C)$, donde obtenemos que $y = z$. Así, tenemos que $x = y = z$, lo que deriva en la siguiente propiedad:

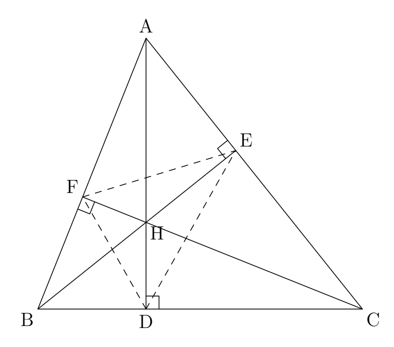
Proposición. *Un triángulo es dividido por sus medianas en seis triángulos de igual área.*

Continuando con el análisis de la figura, notamos que $(GAB) = 2(GBA')$. Ya que estos triángulos tienen la misma altura, se sigue que $AG = 2 \cdot GA'$. Análogamente, $BG = 2 \cdot GB'$, y $CG = 2 \cdot GC'$:

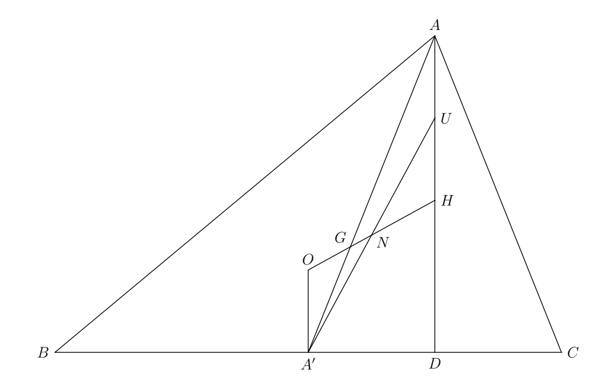
Proposición. *Las medianas de un triángulo se dividen unas a otras en razón 2:1, en otras palabras las medianas de un triángulo se trisecan unas a otras.*



Se definen como *Simetrales* a las rectas que son perpendiculares a los lados de un triángulo en sus puntos medios respectivos. Las simetrales también se definen como el lugar geométrico de los puntos equidistantes a los vértices del triángulo (o sea, son el conjunto de todos los puntos con igual distancia a dos vértices del triángulo). Digamos que las simetrales de AB y BC se cortan en un punto O, luego $OA = OB$ y $OB = OC$, entonces $OA = OC$. Por lo tanto la simetral de AC también pasa por O. Es decir, que las simetrales concurren en un punto que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, a este punto lo llamaremos *circuncentro*, además llamaremos al círculo el *circuncírculo* del triángulo. El radio del circuncírculo será denotado por la letra R.



Las rectas AD, BE, CF, perpendiculares a BC, CA, AB, respectivamente, son llamadas *alturas* del $\triangle ABC$.

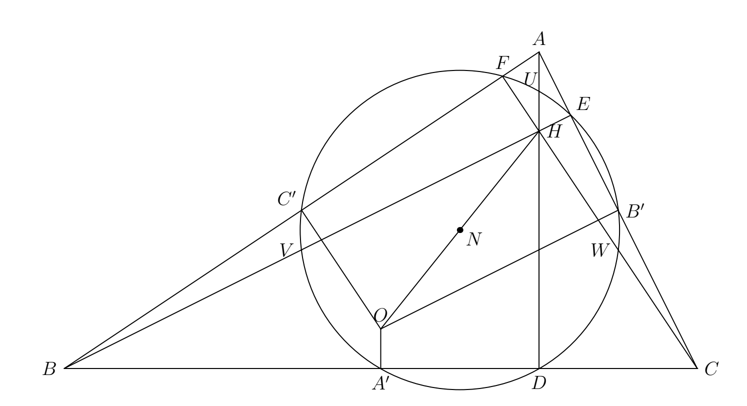


Prolonguemos OG hasta un punto H tal que $2OG = GH$. Como $2A'G = GA$ y $\angle AGH = \angle A'GO$, entonces $\triangle AGH \sim \triangle A'GO$. Luego $\angle GAH = \angle GA'O$, entonces $OA' \parallel AH$. Luego $AH \perp BC$, o sea AH es altura del triángulo. Análogamente BH y CH son alturas de $\triangle ABC$. Por lo tanto las alturas concurren en un punto que llamamos *ortocentro*.

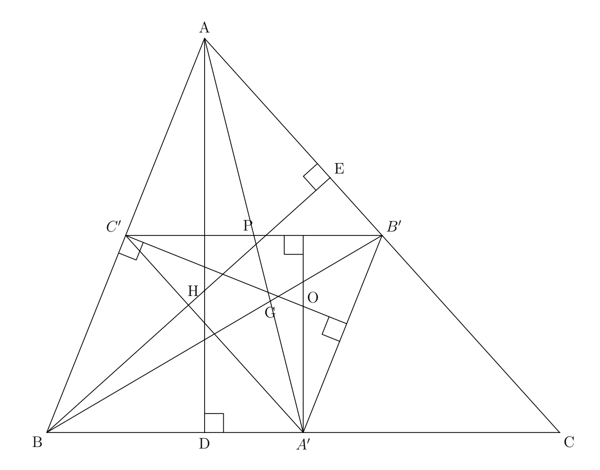
Los puntos D, E, F son los llamados pies de las alturas. Uniendo estos en parejas obtenemos $\triangle DEF$, el *triángulo órtico* del $\triangle ABC$.

Notemos además que G, H y O están en una misma recta, la cual llamaremos *Recta de Euler*. Además como $\triangle AGH \sim \triangle A'GO$ entonces $AH = 2OA'$.

Ahora llamaremos N al punto medio de OH. Sean U, V y W los puntos medios de AH, BH y CH respectivamente. Como $OA' \parallel AH$ tenemos que $\dfrac{AN}{NU} = \dfrac{ON}{NH} = 1$, o sea $AN = NU$. Por lo tanto N es el circuncentro del triángulo rectángulo $A'DU$. Análogamente tenemos que N es el circuncentro de $\triangle B'EV$ y de $\triangle C'FW$. O sea que N es el centro de una circunferencia que contiene a los nueve puntos A', B', C', D, E, F, U, V y W, la cual recibe el nombre de *Circunferencia de los Nueve Puntos*.



El triángulo formado al unir los puntos medios de los lados de un triángulo dado será llamado *triángulo medial*. En la figura, $\triangle A'B'C'$ es el triángulo medial del $\triangle ABC$. Tenemos insertadas las dos transversales AA' y BB' que se encuentran en G, dos alturas del $\triangle ABC$ que se encuentran en H, y dos alturas del $\triangle A'B'C'$ que se encuentran en O.

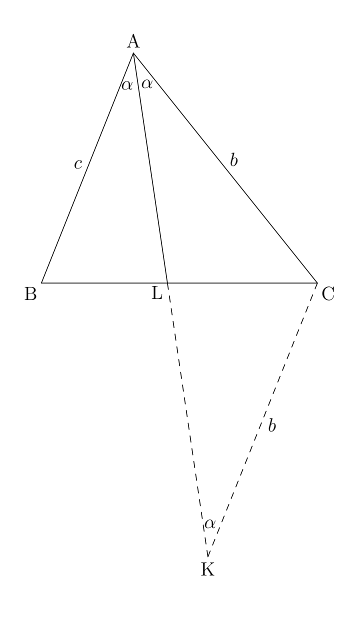


Primero, $\triangle A'B'C'$ tiene sus lados paralelos a los del $\triangle ABC$, así que los triángulos son semejantes. Luego, $C'B' = \frac{1}{2}BC$, por lo que la razón entre dos segmentos correspondientes (no sólo los lados correspondientes) será $1 : 2$. De hecho los segmentos $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ dividen al $\triangle ABC$ en cuatro triángulos congruentes.
Luego, vemos que $AC'A'B'$ es un paralelógramo, así que AA' bisecta a $B'C'$. Por lo tanto, las transversales del $\triangle A'B'C'$ se encuentran dentro de las transversales del $\triangle ABC$, lo que significa que los dos triángulos tienen el mismo baricentro, G. Por cierto, el punto medio P de $B'C'$ también es el punto medio de AA'.
Las alturas del $\triangle A'B'C'$ que hemos dibujado son simetrales de los lados AB y BC del $\triangle ABC$. Cocluímos que O, el *ortocentro* del $\triangle A'B'C'$ es a la vez el *circuncentro* del $\triangle ABC$.

Como N es el circuncentro del triángulo medial, entonces el radio de la circunferencia de nueve puntos es $\dfrac{R}{2}$.

Otro importante conjunto de rectas, es el de las tres bisectrices internas. La figura muestra la bisectriz AL. Con esto podemos establecer el siguiente teorema:

Teorema de la Bisectriz Interior. *Cada bisectriz de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes.*

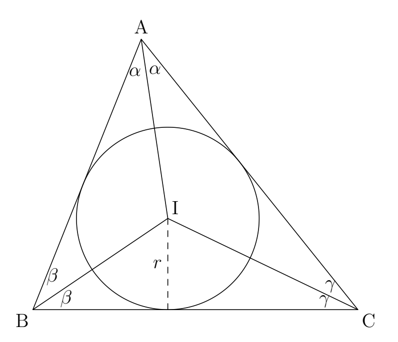


Demostración:

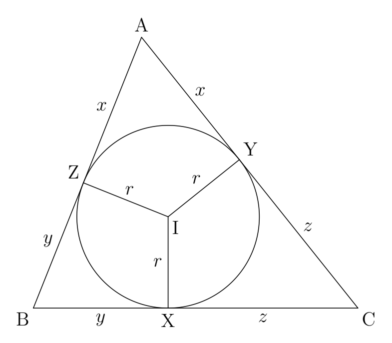
Sea $K \in \overleftrightarrow{AL}$ y $CK \parallel AB$. Notemos que $\angle CKL = \alpha \Rightarrow AC = CK = b$. Por criterio de semejanza $A - A - A$ se tiene que el $\triangle ABL \sim \triangle KCL$, entonces:

$$\frac{BL}{LC} = \frac{c}{b}$$

Cualquier punto en la bisectriz interior del ángulo A es equidistante de CA y AB. De manera similar, cualquier punto de la bisectriz interior del ángulo B es equidistante de AB y BC. Por lo tanto el punto I, donde estas dos bisectrices se encuentran, está a igual distancia r de los tres lados, por lo que se concluye que las bisectrices interiores de un triángulo concurren.



El círculo con centro I y radio r es tangente a los tres lados del triángulo y es así el círculo inscrito o *incírculo*. Llamaremos I al *incentro* y r al *inradio.*



En la figura se muestra el incírculo, que toca a los lados BC, CA, AB en X, Y, Z. Como dos tangentes a un círculo trazadas desde cualquier punto exterior son iguales, vemos que $AY = AZ$, $BZ = BX$, $CX = CY$. Hemos llamado en consecuencia a estos segmentos x, y, z, así que:

$$y + z = a, \quad z + x = b, \quad x + y = c$$

Usando estas ecuaciones y la abreviación de Euler s para el semiperímetro, tenemos:

$$2x + 2y + 2z = a + b + c = 2s$$

así que:

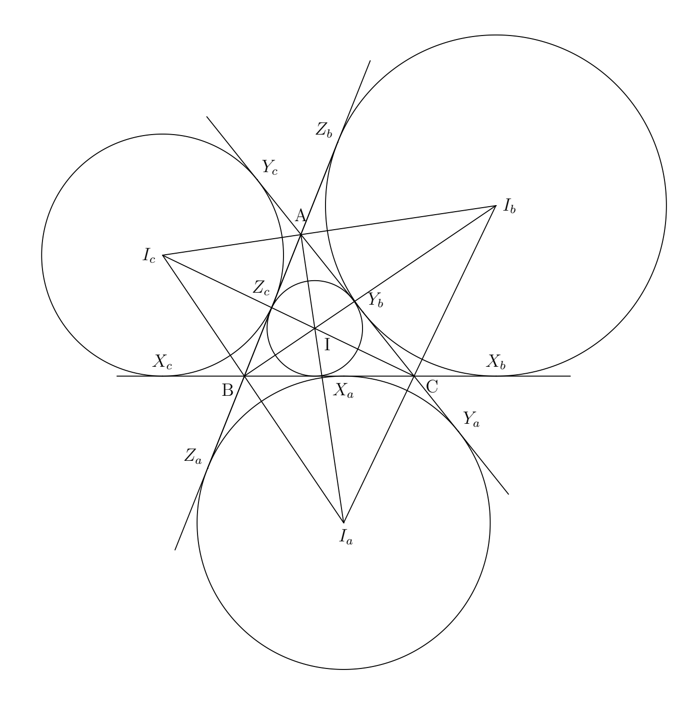
$$x + y + z = s$$

y además

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c$$

Como el triángulo IBC tiene base a y altura r, su área es $(IBC) = \frac{1}{2}ar$. Agregando a esto las expresiones análogas de (ICA) y (IAB), obtenemos $\frac{1}{2}(a + b + c)r = s \cdot r$. Por lo tanto:

$$(ABC) = s \cdot r$$



En la figura se muestra el triángulo $I_aI_bI_c$ cuyos lados son las bisectrices interiores de los ángulos A, B, C. Cualquier punto de la bisectriz exterior I_cI_a del $\angle B$ es equidistante de AB y BC. De manera similar, cualquier punto en I_aI_b es equidistante de BC y CA. Por lo tanto el punto I_a se encuentra a igual distancia r_a de los tres lados. Como I_a es equidistante de los lados AB y AC, deberá situarse en el lugar geométrico de los puntos equidistantes de estas líneas; es decir, debe situarse en la recta AI, la bisectriz interior de $\angle A$. Por lo tanto las bisectrices exteriores de dos ángulos cualquiera de un triángulo concurren con la bisectriz interior del tercer ángulo.

El círculo con centro I_a y radio ρ_a, es tangente a los tres lados, es uno de los tres círculos "exinscritos" o *excírculo*. Llamaremos a sus centros I_a, I_b, I_c, los *excentros* y sus radios r_a, r_b, r_c los *exradios*. Cada círculo toca un lado del triángulo internamente y a las prolongaciones de los otros dos lados. El incírculo y los tres excírculos, cada uno tocando a los tres lados, son llamados a veces los cuatro círculos *tritangentes* del triángulo.

Marcando los puntos de contacto en la figura, observamos que, como dos tangentes trazadas desde un punto a un círculo son de igual medida,

$$BX_b = BZ_b \qquad \text{y}$$

$$\begin{aligned} BX_b + BZ_b &= BC + CX_b + Z_bA + AB \\ &= BC + CY_b + Y_bA + AB = a + b + c = 2s \end{aligned}$$

Así las tangentes desde B (o cualquier otro vértice) al excírculo más allá del lado opuesto son de longitud s. Es más,

$$AY_a = AZ_a = BZ_b = BX_b = CX_c = CY_c = s$$

Además, como $CX_b = BX_b - BC = s - a$, y así sucesivamente:

$$BX_c = BZ_c = CX_b = CY_b = s - a$$

$$CY_a = CX_a = AY_c = AZ_c = s - b$$

$$AZ_b = AY_b = BZ_a = BX_a = s - c$$

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Sea $\triangle ABC$ equilátero y sea P un punto en su interior. Las rectas AP, BP y CP cortan a los lados BC, CA y AB en los puntos A_1, B_1 y C_1, respectivamente. Pruebe que:*

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A$$

(Verano Matemático 2008)

Propuesto 2. *En un $\triangle ABC$ sea $\overline{AP}$ la bisectriz del $\angle BAC$ con P sobre $\overline{BC}$ y sea $\overline{BQ}$ la bisectriz del $\angle ABC$ con Q sobre $\overline{CA}$. Se sabe que $\angle BAC = 60$ y que $AB + BP = AQ + QB$. ¿Cuáles son los posibles valores de los ángulos del $\triangle ABC$?*

(IMO 2001)

Propuesto 3. *Sea ABC un triángulo rectángulo en C, de catetos a y b, y de hipotenusa c. Si r es el radio de la circunferencia inscrita del $\triangle ABC$, demuestre que:*

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Propuesto 4. *Pruebe que el ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo órtico.*

Propuesto 5. *El $\triangle ABC$ es isósceles en A, y su incentro es I. Una recta ℓ, que pasa por I, interseca a los lados $\overline{AB}, \overline{AC}$ en D, E, respectivamente. $F, G \in \overline{BC}$ tales que $BF = CE$ y $CG = BD$. Muestre que el $\angle FIG$ tiene medida constante al variar ℓ.*

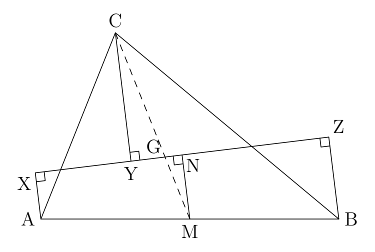
(OMCS 2005)

Problemas Resueltos

Problema. *Sea $\triangle ABC$ cualquiera. Considere una recta ℓ que pasa por el baricentro G. Sean X, Z, Y los pies de las perpendiculares desde A, B, C a ℓ, respectivamente. Pruebe que $CY = AX + BZ$.*

(Verano Matemático 2007)

Solución:



Sean $AX = a, BZ = b, CY = c$. Sea M el punto medio de $\overline{AB}$ y N el punto medio de $\overline{XZ}$. Note que $XZBA$ es un trapecio (ya que $\overline{XA} \parallel \overline{BZ}$, pues ambas son perpendiculares a ℓ), por lo tanto $\overline{MN}$ es su paralela media, cuya medida corresponde a la semisuma de las bases ($\frac{a+b}{2}$).

Tracemos la transversal de gravedad CM, y notemos que $\triangle CZG \sim \triangle MNG$. De esta semejanza, se tiene que:

$$\frac{c}{\frac{a+b}{2}} = \frac{CG}{MG}$$

Pero veamos que $\dfrac{CG}{MG} = \frac{2}{1}$, porque G es baricentro. De esta forma:

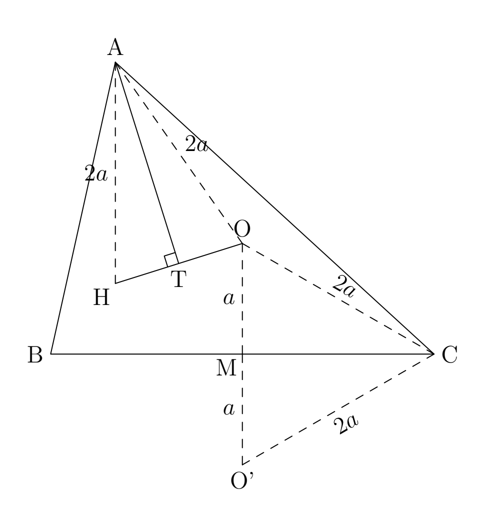
$$\frac{c}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right) 2 = c \Rightarrow a + b = c$$

Y ya que $AX = a, BZ = b, CY = c$, finalmente se tiene que $CY = AX + BZ$, como se pedía ■

Problema. *Si el vértice A, del triángulo ABC, yace sobre la simetral del segmento $\overline{HO}$ (H ortocentro, O circuncentro), determine la medida del $\angle BAC$.*

(Verano Matemático 2007)

Solución:



Sea M el punto medio de $\overline{BC}$, y sea $OM = a$. Es sabido que $\overline{OM} \perp \overline{BC}$, por ser O circuncentro del $\triangle ABC$. Como vimos $AH = 2OM$, es decir, $AH = 2a$. Como $\overline{AT}$ es simetral de $\overline{HO}$ (con $T \in \overline{HO}$, en la figura), se tiene que $\triangle AHO$ es isósceles con $AH = AO = 2a$. También se tiene que $AO = OC = 2a$, por ser ambos circunradios.

Prolonguemos $\overline{OM}$ hasta O' de modo que $OM = MO' = a$ (el orden lineal de los puntos es $O - M - O'$). Por criterio de congruencia de triángulos LAL, se tiene que $\triangle OMC \cong \triangle O'MC$, de donde se sigue que $CO' = CO = 2a$, es decir el $\triangle OO'C$ es equilátero de lado $2a$. Así $\angle MOC = 60^o$. Además, veamos que $\overline{OM}$ es simetral del $\overline{BC}$ en el $\triangle OBC$, luego $\angle BOM = \angle MOC = 60^o$.

De este modo, como O es circuncentro, se sigue que $\angle BOC = 2\angle BAC$. En otras palabras, $\angle BAC = \dfrac{\angle BOC}{2} = \dfrac{120^o}{2} = 60^o$. Finalmente, el valor del $\angle BAC$ es 60° ■

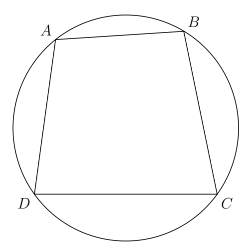
2.2. Cuadriláteros Cíclicos

Definición. Se dice que un cuadrilátero es cíclico si puede inscribirse en una circunferencia, es decir, si sus cuatro vértices pertenecen a una misma circunferencia.

Teorema. *Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios, es decir, suman* 180°.

Demostración:

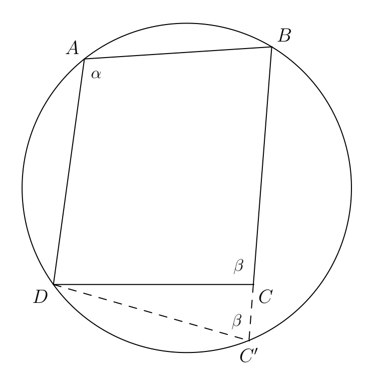
Veamos la primera implicancia: $ABCD$ es cíclico $\Rightarrow \angle DAB + \angle BCD = 180^o$.



La notación $\widehat{XY}$ denotará la medida en grados del arco de circunferencia XY, en sentido anti-horario.

Sabemos que $\angle DAB = \dfrac{\widehat{DB}}{2}$ y que $\angle BCD = \dfrac{\widehat{BD}}{2}$. Sumando se obtiene que $\angle DAB + \angle BCD = \dfrac{\widehat{DB} + \widehat{BD}}{2} = \dfrac{360^o}{2} = 180^o$ ■

Ahora probaremos la segunda implicancia: $\angle DAB + \angle BCD = 180^o \Rightarrow ABCD$ es cíclico.



Considerando la hipótesis, supongamos que $ABCD$ no es cíclico. Si dibujamos la circunferencia circunscrita al $\triangle ABD$ (Γ), se tiene que C no pertenece a Γ (de otro modo $ABCD$ es cíclico). En la figura, sean $\angle DAB = \alpha$ y $\angle BCD = \beta$. Por hipótesis $\alpha + \beta = 180^o$.

Prolongamos $\overline{BC}$ hasta cortar nuevamente a Γ en C'. Entonces $ABC'D$ es un cuadrilátero cíclico (sus cuatro vértices pertenecen a Γ). Pero acabamos de probar que en un cuadrilátero cíclico sus ángulos opuestos suman 180°, entonces $\angle BAD + \angle BC'D = 180^o \Leftrightarrow \alpha + \angle BC'D = 180^o \Rightarrow \angle BC'D = \beta$, pues $\alpha + \beta = 180^o$ por hipótesis. Así $\angle BCD = \angle BC'D = \beta$, entonces $\angle CDC' = 0^o$, lo que implica $C = C'$. Por lo tanto C pertenece a Γ, es decir, $ABCD$ es cíclico $\square$

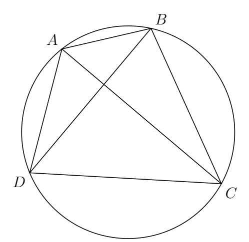
Nota: en esta demostración, C está en la región interior de Γ. Plantee y resuelva el caso en que C se halla en le región exterior de Γ (es análogo).

Corolario. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, y E un punto en la prolongación del lado $\overline{BC}$, más allá de B. Entonces $ABCD$ es cíclico si y sólo si $\angle EBA = \angle ADC$.

Teorema. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Entonces $ABCD$ es cíclico si y sólo si $\angle DAC = \angle DBC$.*

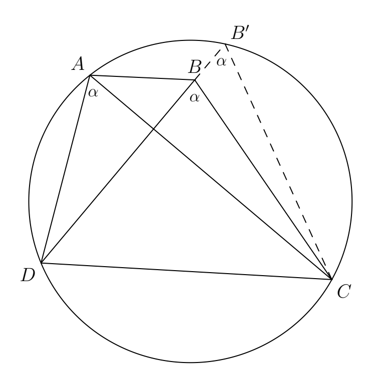
Demostración:

Primero probaremos que si $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle DAC = \angle DBC$. Usaremos la misma notación de la demostración del primer teorema.



La tesis es directa, ya que $\angle DAC = \dfrac{\widehat{DC}}{2} = \angle DBC$ $\square$

Ahora probaremos que $\angle DAC = \angle DBC$ implica que $ABCD$ es cíclico. Supongamos lo contrario. Sea Ω la circunferencia circunscrita al $\triangle ADC$, entonces B no pertenece a Ω. En la siguiente figura, sean $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$.



Prolongamos la diagonal $\overline{DB}$ hasta cortar a Ω nuevamente en B'. Luego $AB'CD$ es cíclico, entonces $\angle DAC = \angle DB'C = \alpha$ (implicancia anterior). Así tenemos que $\angle DBC = \angle DB'C = \alpha$, de donde $\angle B'CB = 0^o$, es decir, $B = B'$. Por lo tanto $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico $\square$

Nota: En esta demostración, B está en la región interior de Ω. Plantee y resuelva el caso en que B se halla en le región exterior de Ω (es análogo).

Estos teoremas son bastante útiles en la resolución de problemas de olimpíadas, como el lector podrá apreciar en los problemas propuestos y resueltos de esta sección.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $\angle ACB = 60$. Sea E un punto interior a $\overline{AC}$ tal que $CE < BC$. Sea D sobre $\overline{BC}$ tal que*

$$\frac{AE}{BD} = \frac{BC}{CE} - 1$$

Llamemos P a la intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BE}$ y Q al otro punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos AEP y BDP. Pruebe que $\overleftrightarrow{QE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

(Verano Matemático 2008)

Propuesto 2. *Sea ABC un triángulo acutángulo, de alturas $\overline{AD}, \overline{BE}$ y $\overline{CF}$ (con D en $\overline{BC}$, E en $\overline{AC}$ y F en $\overline{AB}$). Sea M el punto medio del segmento BC. La circunferencia circunscrita al $\triangle AEF$ corta a la recta AM en A y en X. La recta AM corta a la recta CF en Y . Sea Z el punto de corte de las rectas AD y BX. Pruebe que $\overleftrightarrow{YZ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.*

(OMCS 2007)

Propuesto 3. *Sean* KL *y* KN *tangentes a una circunferencia* $\mathcal{C}$, *con* $L, N \in \mathcal{C}$. *Sea* M *un punto en la prolongación de* KN *más allá de* N, *y sea* P *el segundo punto de intersección de* $\mathcal{C}$ *con el circuncírculo del* $\triangle KLM$. *Sea* Q *el pie de la perpendicular trazada desde* N *a* ML. *Muestre que* $\angle MPQ = 2\angle KML$.

(Irán 1997)

Propuesto 4. *Dado un triángulo isósceles* ABC *con* $AB = AC$, *anotamos con* M *el punto medio del lado* $\overline{BC}$. *Sea* X *un punto cualquiera del arco más corto* MA *del circuncírculo del* $\triangle ABM$ *y sea* T *el punto en el interior del* $\angle BMA$ *tal que* $\angle TMX = 90^o$ *y* $TX = BX$. *Demuestre que* $\angle MTB - \angle CTM$ *no depende de* X.

(Olimpíada Nacional Nivel Mayor 2007)

Propuesto 5. *Sea* ABC *un triángulo. Sea* D *la reflexión de* C *con respecto a* $\overline{AB}$ *y sea* E *la reflexión de* B *con respecto a* $\overline{AC}$. *Las rectas* $\overleftrightarrow{DB}$ *y* $\overleftrightarrow{EC}$ *se cortan en* T. *Pruebe que* $\overline{AT}$ *pasa por el circuncentro del* $\triangle ABC$.

(Verano Matemático 2007)

Problemas Resueltos

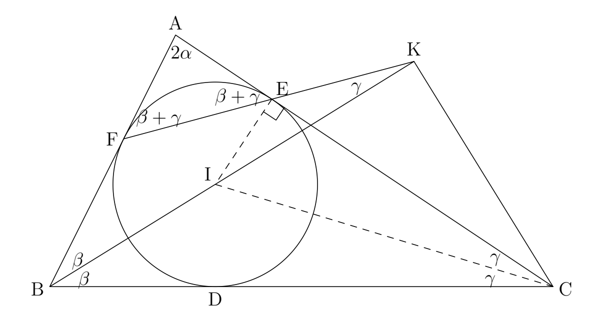
Problema. *El incírculo del $\triangle ABC$ tiene centro I y es tangente a $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ en X, Y, Z, respectivamente. $\overleftrightarrow{BI} \cap \overleftrightarrow{YZ} = P, \overleftrightarrow{CI} \cap \overleftrightarrow{YZ} = Q$. Pruebe que, si $XP = XQ$, entonces el $\triangle ABC$ es isósceles.*

(OIM 2001)

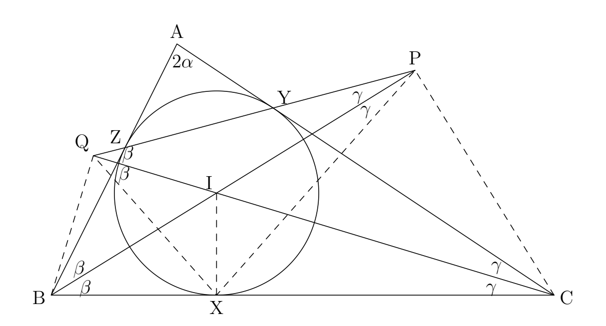
Solución:

Lema. Considere un triángulo ABC de incentro I, cuyo incírculo es tangente a $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ en D, E, F, respectivamente. Sea $K = \overleftrightarrow{FE} \cap \overleftrightarrow{BI}$. Entonces $\angle BKC = 90$.

Demostración Lema:



Sean $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$. Trace $\overline{IE}, \overline{IC}$. Es claro que $\angle IEC = 90$ ya que $\overline{IE}$ es inradio y $\overline{AC}$ es tangente al incírculo. Note que $AF = AE$ por ser tangentes al incírculo, y como $2\alpha+2\beta+2\gamma = 180$ se sigue que $\angle AFE = \angle AEF = \beta+\gamma$. Entonces, como se sabe que $\angle FBK + \angle FKB = \angle AFK$, se sigue que $\angle FKB = \gamma$. Entonces se tiene que $\angle EKI = \angle ECI = \gamma$, lo que implica que $EKCI$ es un cuadrilátero cíclico, de donde se sigue $\angle IEC = 90 = \angle IKC = \angle BKC$, como se pedía $\square$

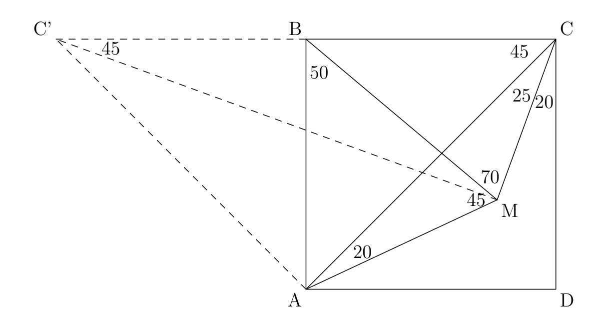


Sean $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$. Tracemos $\overline{IX}, \overline{XP}, \overline{PC}, \overline{QX}, \overline{QB}$. Veamos que $\overline{IX} \perp \overline{BC}$ pues son inradio y tangente al incírculo, respectivamente. Por el **Lema**, se tiene que $\angle BPC = 90 = \angle CQB$, luego $QPCB$ es un cuadrilátero cíclico, de donde $\angle PBC = \angle PQC = \beta$ y $\angle QCB = \angle QPB = \gamma$. Note que $IPCX$ es cíclico ($\angle IPC = \angle IXC = 90$), entonces se tiene que $\angle ICX = \angle IPX = \gamma$. Análogamente se tiene que $QIXB$ es cíclico, de donde $\angle IBX = \angle IQX = \beta$. Y como $XP = XQ$, se sigue que $\angle XQP = \angle XPQ$, es decir, $2\beta = 2\gamma$, o sea $\angle B = \angle C$: $\triangle ABC$ es isósceles con $AB = AC$, como se pedía ■

Problema. *Un punto M es escogido dentro del cuadrado $ABCD$ de manera tal que $\angle MAC = \angle MCD = 20^o$. Encuentre el valor del $\angle ABM$.*

(Verano Matemático 2007)

Solución:



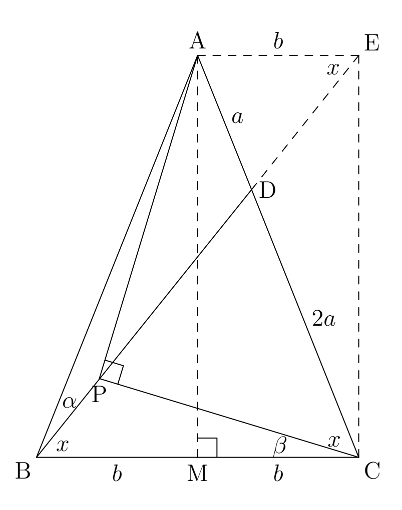
Como $\overline{AC}$ es diagonal, se tiene que $\angle ACD = 45^o$, entonces $\angle ACM = \angle ACD - \angle MCD = 45^o - 20^o = 25^o$. Por lo tanto $\angle AMC = 135^o$ (suma de ángulos interiores en el $\triangle AMC$). Sea C' el reflejo de C con respecto a B. Entonces $\angle AC'B = 45^o$. Notemos de esta forma que $C'CMA$ es un cuadrilátero cíclico (ya que $\angle AC'C + \angle AMC = 45^o + 135^o = 180^o$), luego $\angle C'CA = \angle C'MA = 45^o \Rightarrow \angle C'MC = 90^o$.

Notemos que la semicircunferencia con centro en B y radio $\overline{BC}$ pasa por C' y M, porque $BC = BC'$ y $\angle C'MC = 90^o$ (este ángulo recto está inscrito en la semicircunferencia). En otras palabras, $BM = BC$ son radios, y de esta forma $\angle BMC = \angle BCM = 70^o$, luego $\angle CBM = 40^o \Rightarrow \angle ABM = 50^o$ ■

Problema. *Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = AC$. Sea D un punto en el lado $\overline{AC}$ tal que $CD = 2AD$. Sea P un punto en el segmento $\overline{BD}$ tal que $\angle APC = 90^o$. Pruebe que $\angle ABP = \angle PCB$.*

(Verano Matemático 2008)

Solución:



Sea $\angle ABP = \alpha$ y $\angle PCB = \beta$. Probaremos que $\alpha = \beta$. Sea M el punto medio de $\overline{BC}$, y sean $BM = MC = b$. Sea $AD = a \Rightarrow CD = 2a$. Sea ℓ una recta que es paralela a $\overline{BC}$ y que pasa por A, y sea $E = \ell \cap \overleftrightarrow{BD}$. Veamos que, como $\triangle ABC$ es isósceles con $AB = AC$, $\overline{AM}$ además de ser transversal de gravedad, es también altura, es decir, $\overline{AM} \perp \overline{BC}$.

Como $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$, se tiene que $\triangle DAE \sim \triangle DCB \Rightarrow \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{AE}{CB} = \dfrac{AE}{2b} \Rightarrow$ $AE = b$.

Notemos que $\overline{AE} \parallel \overline{MC}$ y $AE = MC = b \Rightarrow AECM$ es un paralelógramo, pero $\angle AMC = 90^o$, lo que implica que $AECM$ es un rectángulo, y entonces $\angle AEC = 90^o$.

Notemos entonces que $AECP$ es un cuadrilátero cíclico (pues $\angle APC + \angle AEC = 90^o + 90^o = 180^o$), luego $\angle AEP = \angle ACP = x$. Ya que $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$, se sigue que $\angle AEB = x = \angle EBC$. Por lo tanto, dado que $\triangle ABC$ es isósceles de base $\overline{BC}$ se tiene que $\angle ABC = \angle ACB \Leftrightarrow \angle ABP + \angle PBC = \angle ACP + \angle PCB \Leftrightarrow \alpha + x = x + \beta \Rightarrow$ $\alpha = \beta$, probando lo pedido ■

2.3. La circunferencia y sus propiedades

Comenzaremos esta sección estudiando dos importantes teoremas de Euclides, el primero acerca del producto de las partes en las cuales dos cuerdas de una circunferencia se dividen entre sí, y comparando una secante y una tangente trazadas desde un mismo punto P afuera del círculo. Si consideramos una tangente como el límite de una secante y combinamos estos resultados, se obtiene lo siguiente:

Teorema. *Si dos líneas pasan a través de un punto P y cortan a la circunferencia en los puntos A, A' y B, B', respectivamente, entonces $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$.*

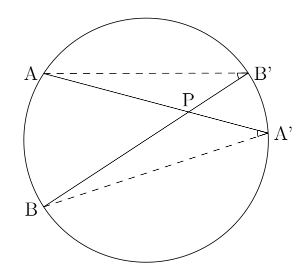


Figura A

Para probar este teorema sólo tenemos que observar que los triángulos PAB' y PBA' son semejantes, entonces:

$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PB}{PA'}.$$

En la figura B, igualmente podemos usar los triángulos semejantes PAT y PTA' para obtener:

$$\frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PA'}.$$

y entonces decimos que $PA \cdot PA' = PT^2 = PB \cdot PB'$.

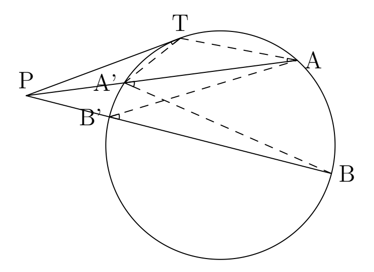


Figura B

Sea R el radio de la circunferencia y d la distancia de P al centro. Al tomar BB' como diámetro para que P pertenezca a él (con B más lejos de P que B'), vemos que, si P está dentro de la circunferencia (como en la Figura A),

$$AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = (R+d)(R-d) = R^2 - d^2.$$

y si P está fuera (como en la Figura B),

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = (d+R)(d-R) = d^2 - R^2.$$

La ecuación

$$PA \cdot PA' = R^2 - d^2$$

proporciona una rápida demostración a una fórmula de Euler:

Teorema. *Sean O e I el circuncentro y el incentro, respectivamente, de un triángulo con circunradio R e inradio r; sea d la distancia OI. Entonces*

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

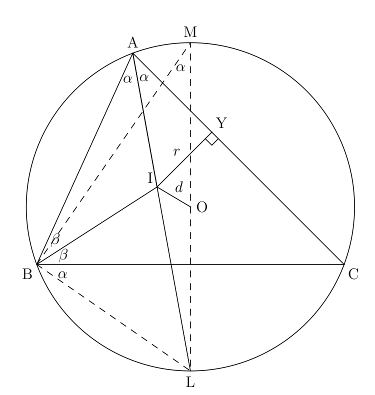


Figura C

La Figura C muestra la bisecriz interior del $\angle A$ extendida hasta cortar al circuncírculo en L, el punto medio del arco BC que no contiene a A. LM es el diámetro perpendicular a BC. Denotamos, por conveniencia, $\alpha = \frac{1}{2}A$ y $\beta = \frac{1}{2}B$, así nos damos cuenta que

$$\angle BML = \angle BAL = \alpha, \quad y \quad \angle LBC = \angle LAC = \beta$$

Además $\triangle MBL \sim \triangle AYI$, entonces

$$\frac{LB}{LM} = \frac{IY}{IA}$$

Como el ángulo exterior del $\triangle ABI$ en I es

$$\angle BIL = \alpha + \beta = \angle LBI$$

se tiene que el $\triangle LBI$ es isósceles $\Rightarrow LI = LB$. Así

$$\begin{aligned} R^2 - d^2 &= LI \cdot IA = LB \cdot IA \\ &= LM \frac{LB/LM}{IY/IA} IY \\ &= LM \cdot IY = 2Rr \end{aligned}$$

esto significa, $d^2 = R^2 - 2Rr$, que era lo que queríamos probar.

Para cualquier circunferencia de radio R y un punto P a distancia d del centro, llamamos a

$$d^2 - R^2$$

la potencia de P con respecto al círculo. Esta potencia es claramente positiva cuando P está fuera, cero cuando P pertenece a la circunferencia y negativa cuando P está dentro. Para el primero de estos casos ya hemos obtenido la expresión alternativa $PA \cdot PA'$, donde A y A' son dos puntos cualquiera en la circunferencia, colineales con P. Esta expresión para la potencia de un punto P sigue siendo válida para todas las posiciones de P si estamos de acuerdo en adoptar la idea de Newton de los segmentos de línea dirigidos: una especie de vector uni-dimensional en el álgebra, en que

$$AP = -PA$$

El producto de dos segmentos dirigidos en una línea está considerado como positivo o negativo, de acuerdo con las direcciones. Con esta convención, la ecuación

$$d^2 - R^2 = PA \cdot PA'$$

es válida universalmente. Si P está dentro del círculo,

$$d^2 - R^2 = -(R^2 - d^2) = -AP \cdot PA' = PA \cdot PA';$$

y si P está en la circunferencia, A o A' coincide con P así que uno de los segmentos tiene medida cero. En resumen, despues de observar que el producto $PA \cdot PA'$ tiene el mismo valor para todas las secantes (o cuerdas) que pasan por P, podemos usar este valor como una definición para la potencia de P con respecto a una circunferencia.

El lugar geométrico de todos los puntos cuyas potencias con respecto a dos circunferencias no concéntricas son iguales, es una recta perpendicular a la línea que une los centros de las dos circunferencias.

En el Plano Cartesiano, el cuadrado de la distancia d entre dos puntos cualquiera (x, y) y (a, b) es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

Por lo tanto la potencia de (x, y) con respecto a la circunferencia de centro (a, b) y radio r es

$$d^2 - r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2$$

En particular, el círculo en sí es el lugar geométrico de los puntos (x, y) de potencia cero y tiene la ecuación

$$(1)\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

La misma ecuación en la forma $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, expresa al círculo como el lugar geométrico de los puntos cuya ditancia de (a, b) tiene el valor constante r.

Cuando este círculo es expresado en la forma

$$(2)\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

(donde $c = a^2 + b^2 - r^2$), la potencia de un punto arbitrario (x, y) es nuevamente expresada por el lado izquierdo de la ecuación, a saber:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c$$

Otro círculo que tenga el mismo centro (a, b) pero un diferente radio tiene una ecuación de la misma forma con diferente c, y cualquier círculo que tenga un centro diferente tiene una ecuación de la forma

$$(3)\ x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c' = 0$$

donde $a' \neq a$ o $b' \neq b$ o ambos. Por lo tanto estamos libres para usar las ecuaciones (2) y (3) para las dos circunferencias no concéntricas mencionadas. El lugar geométrico de todos los puntos (x, y) cuyas potencias con respecto a estos dos círculos son iguales es:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = x^2 + y^2 - 2a'x - 2b'y + c'$$

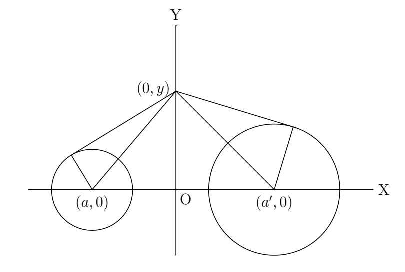
Como $x^2 + y^2$ se cancela, el lugar geométrico es la *recta*

$$(a' - a)x + (b' - b)y = \frac{1}{2}(c' - c)$$

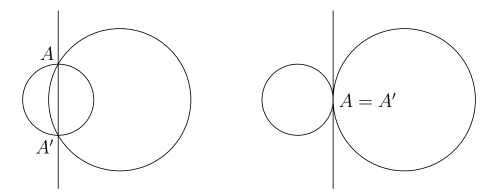
Eligiendo nuestro sistema de referencia tal que el eje X una los centros de las circunferencias tenemos que el lugar geométrico es:

$$x = \frac{(c' - c)}{2(a' - a)}$$

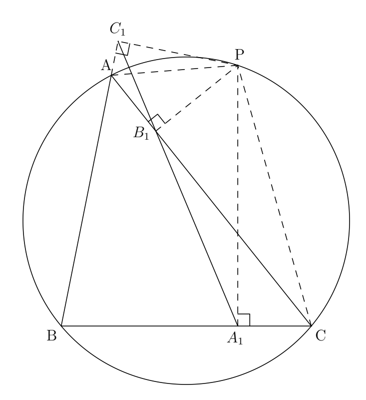
Esta línea, siendo paralela al eje Y, es perpendicular al eje X que es el que une a los centros.



Este lugar geométrico se conoce como el *eje radical* de dos circunferencias. En el caso particular en el que dos circunferencias se intersecan en dos puntos A y A', como cada uno de esos puntos tiene potencia cero para ambas circunferencias entonces el eje radical es la recta AA'. Análogamente cuando las dos circunferencias son tangentes, el eje radical es la tangente a su punto de contacto.



Teorema Simson. *Las proyecciones ortogonales de un punto a los lados de un triángulo son colineales si y sólo si el punto pertenece al circuncírculo.*



Si trazamos las perpendiculares a los lados de un triángulo ABC desde un punto P, por lo general, los pies de esas perpendiculares son los vértices del triángulo $A_1B_1C_1$. Vamos a examinar el caso particular donde el punto P pertenece al circuncírculo, como en la figura . Para ser precisos hemos tomado el punto P en el arco CA que no contiene a B , entre A y el punto diametralmente opuesto a B . Todos los otros casos puede ser derivados a lo mismo renombrando a A, B, C. Por los ángulos rectos en A_1, B_1 y C_1, P pertenece también a los circuncírculos de los triángulos A_1BC_1, A_1B_1C y AB_1C_1. Por lo tanto:

$$\angle APC = 180^o - B = \angle C_1PA_1$$

y, restando $\angle APA_1$, deducimos que

$$\angle A_1PC = \angle C_1PA.$$

Pero como los puntos A_1, C, P, B son concíclicos,

$$\angle A_1PC = \angle A_1B_1C$$

y como los puntos A, B_1, P, C_1 pertenecen a una misma circunferencia,

$$\angle CPA_1 = \angle C_1B_1A$$

Así

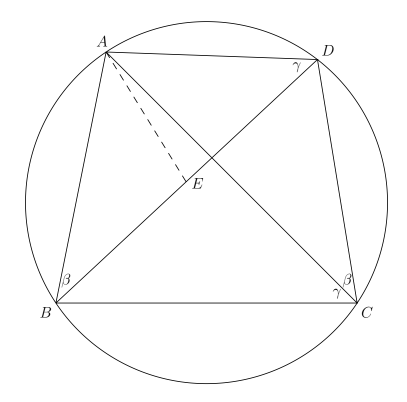
$$\angle A_1B_1C = \angle C_1B_1A$$

así que los puntos A_1, B_1, C_1 son colineales.

La línea que contiene a los pies es conocida como la *Recta de Simson* de los puntos con respecto al triángulo.

Teorema de Ptolomeo. *Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma del los productos de los dos pares de lados opuestos es igual al producto de las diagonales.*

Demostración:



Sea $\angle ABD = \angle ACD = \beta$ y $\angle ACB = \angle ADB = \gamma$. Sea $E \in \overline{BD}$ tal que $\angle BAC = \angle DAE \Rightarrow \angle BAE = \angle DAC$. Notemos que $\triangle ABC \sim \triangle AED \Rightarrow AD \cdot BC = ED \cdot AC(i)$. Además $\triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow AB \cdot BC = BE \cdot AC(ii)$. Sumando (i) y (ii) obtenemos que:

$$\begin{aligned} AD \cdot BC + AB \cdot BC &= AC(DE + EB) \\ &= AC \cdot BD \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *El incírculo del* $\triangle ABC$ *es tangente a* $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ *en* D, E, F, *respectivamente.* $\overline{AD}$ *vuelve a intersecar al incírculo en el punto* Q. *Pruebe que* $\overleftrightarrow{EQ}$ *pasa por el punto medio de* $\overline{AF} \Leftrightarrow AC = BC$.

(OIM 1998)

Propuesto 2. *Un punto* P *es escogido dentro de un paralelógramo* $ABCD$ *tales que* $\angle APB$ *es suplementario con el* $\angle CPD$. *Demuestre que* $AB \cdot AD = BP \cdot DP + AP \cdot CP$.

Propuesto 3. *Son dadas tres circunferencias,* Ω, Ω_1 *y* Ω_2 *tales que:* Ω_1 *y* Ω_2 *son exteriormente tangentes entre sí en el punto* I, *y ambas son tangentes interiormente a* Ω. *Una tangente común a* Ω_1 *y* Ω_2 *corta a* Ω *en los puntos* B *y* C, *y la tangente común que pasa por* I *interseca a* Ω *en* A *(*A *está al mismo lado de* $\overline{BC}$ *que* I*). Muestre que* I *es el incentro del* $\triangle ABC$.

(IMO ShortList 1992)

Propuesto 4. *Sea* $\overline{AD}$ *la altura relativa al lado* $\overline{BC}$ *del triángulo* ABC, M *y* N *son los puntos medios de los lados* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AC}$, *respectivamente. Sea* E *el segundo punto de intersección de las circunferencias circunscritas a los triángulos* BDM *y* CDN. *Muestre que la recta* $\overleftrightarrow{DE}$ *pasa por el punto medio de* $\overline{MN}$.

(Verano Matemático 2008)

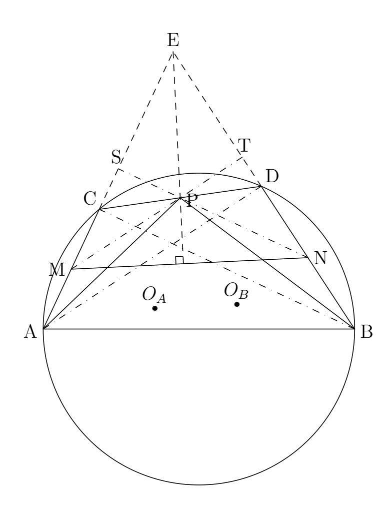
Propuesto 5. *Sea* T *un punto arbitrario en el arco menor* BC *del circuncírculo del triángulo equilátero* ABC. *Pruebe que* $AT = BT + CT$.

Problemas Resueltos

Problema. *Sea C un punto en la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, y D un punto en el arco BC. M, N, P dimidian $\overline{AC}, \overline{DB}, \overline{CD}$, respectivamente. Sean O_A el circuncentro del $\triangle ACP$, y O_B el del $\triangle BDP$. Pruebe que $\overleftrightarrow{O_AO_B} \parallel \overleftrightarrow{MN}$.*

(OIM 2003)

Solución:



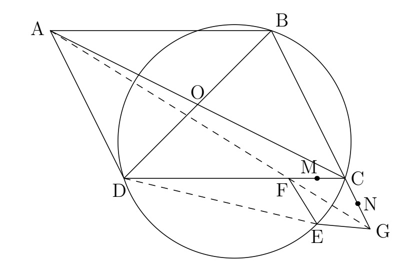
Sea $E = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Como $ABDC$ es cíclico, se tiene que $EC \cdot EA = ED \cdot EB$, es decir, E tiene la misma potencia sobre los circuncírculos de los triángulos $\triangle ACP$ y $\triangle BDP$, entonces la recta $\overleftrightarrow{EP}$ corresponde al eje radical de estos dos círculos: luego $\boxed{\overleftrightarrow{EP} \perp \overleftrightarrow{O_AO_B}}$ (i). Sean $S = \overleftrightarrow{NP} \cap \overleftrightarrow{AC}$ y $T = \overleftrightarrow{MP} \cap \overleftrightarrow{BD}$. Tracemos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Note que, como $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia, se tiene que $\angle ACB = \angle ADB = 90$. Ahora bien, como M es punto medio de $\overline{AC}$ y P es el punto medio de $\overline{CD}$, se sigue que $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \angle MTE = 90$. Análogamente, ya que N es punto medio de $\overline{DB}$ y P es punto medio de $\overline{CD}$, se tiene que $\overleftrightarrow{NP} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \angle NSE = 90$. Por lo tanto P es el ortocentro del $\triangle EMN$ (ya que $\overline{NS}$ y $\overline{MT}$ son alturas y se intersecan en P), luego $\boxed{\overleftrightarrow{EP} \perp \overleftrightarrow{MN}}$ (ii). Finalmente, de (i) y (ii) se obtiene $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{O_AO_B}$, como se pedía ■

Problema. *Sean A, B, C, D, E cinco puntos tales que $ABCD$ es un paralelógramo y $BCED$ es un cuadrilátero cíclico. Sea $\mathcal{L}$ una recta que pasa por A y que corta a $\overline{CD}$ en F y a $\overleftrightarrow{BC}$ en G, de modo que $EF = EG = EC$. Pruebe que $\mathcal{L}$ es la bisectriz del $\angle DAB$.*

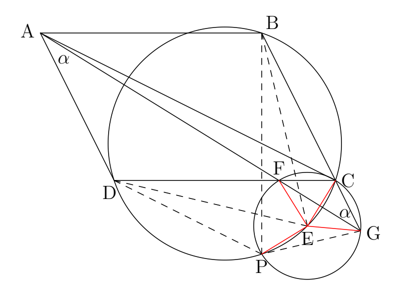
(IMO 2007)

Solución:

Afirmación: Sea Ω la circunferencia circunscrita al cuadrilátero cíclico $EDBC$. Entonces E es el punto medio del arco BD que contiene a C en Ω.



Por enunciado $\triangle EFC$ es isósceles de base $\overline{FC}$, y $\triangle ECG$ también lo es, de base $\overline{CG}$. Con centro en C se hace una homotecia de razón $\frac{1}{2}$ a los puntos A, F, G quedando así determinados los puntos O, M y N, respectivamente. Estos tres puntos son colineales, ya que A, F y G lo son. Por los isósceles mencionados al inicio, se tiene que $\overline{EM} \perp \overline{FC}, \overline{EN} \perp \overline{CG}$: luego, por teorema de Simson en el $\triangle BCD$ con respecto a Ω, se tiene que M, N y la proyección de E sobre $\overline{BD}$ son colineales; notemos que esta proyección es O, ya que $O \in \overline{BD}$ por ser punto medio de $\overline{AC}$ y por tanto intersección de las diagonales del paralelógramo $ABCD$. Luego $\overline{EO} \perp \overline{BD}$ y O es punto medio de $\overline{BD}$, luego E se encuentra en la simetral de $\overline{BD}$, o sea E es punto medio del arco BD que contiene a C $\square$



Sea $\angle DAG = \alpha$, ya que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \angle BGA = \alpha$, luego bastará probar que $\triangle BAG$ es isósceles de base $\overline{AG}$ para obtener lo pedido. Como E está a la misma

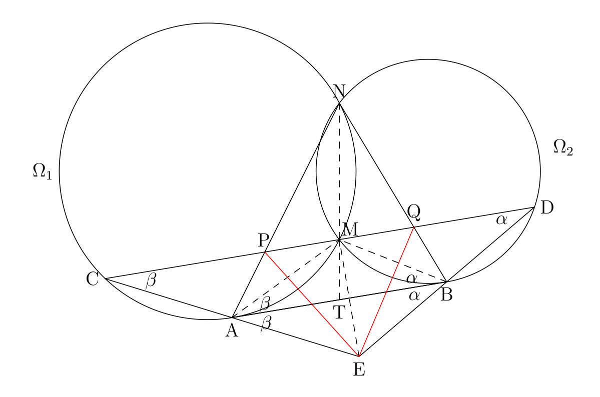
distancia de F, C y G, tracemos la circunferencia de centro E y radio EC, que corta a la circunferencia Ω en C y en P (la circunferencia de la afirmación). Tracemos $\overline{BE}, \overline{BP}, \overline{DE}, \overline{EP}, \overline{PG}, \overline{PC}, \overline{PD}$. Se sabe que $\angle ECP = \angle EPC = 1'$, luego $\angle ECP = \angle EDP = 1'$ y $\angle EPC = \angle EBC = 1'$, y dado que E es el punto medio del arco BD que contiene a C (afirmación), se sigue que $\angle EDB = \angle EBD = \beta$, o sea $\angle PDB = 1' + \beta = \angle DBC$, entonces $BDPC$ es trapecio isósceles (dado que es cíclico), entonces sus diagonales son congruentes, o sea $DC = BP$ $(*)$.

Veamos que $\angle EPG = \angle EGP = 2'$, y sea $\angle CPB = 3'$, luego $\angle PCG = \angle CPB + \angle PBC = 3' + 1' + 1'$ (esto ya que $\angle EDP = \angle EBP = 1'$), así $\angle PCG = 3' + 1' + 1' = \angle ECG + \angle ECP = \angle ECG + 1' \Rightarrow \angle ECG = 1' + 3' = \angle EGC$. Por todo esto $\angle BGP = 1' + 3' + 2' = \angle BPG$, o sea $BP = BG = DC$ (por $(*)$). Pero $DC = AB$ (por paralelógramo $ABCD$), así $BG = BA$, y $\triangle BAG$ es isósceles de base AG, probando lo pedido ■

Problema. *Dos circunferencias, Ω_1 y Ω_2 se cortan en M y en N. La recta ℓ es tangente común a ambas circunferencias en A y B, respectivamente, con M más cerca de ℓ que N. La recta paralela a ℓ que pasa por M corta de nuevo a Ω_1 en C y a Ω_2 en D. Sean $E = \overleftrightarrow{CA} \cap \overleftrightarrow{DB}$, $P = \overleftrightarrow{AN} \cap \overleftrightarrow{CD}$ y $Q = \overleftrightarrow{BN} \cap \overleftrightarrow{CD}$. Pruebe que $EP = EQ$.*

(IMO 2000)

Solución:



Sea $\angle EBA = \alpha$ y $\angle EAB = \beta$. Como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ se sigue que $\angle EBA = \angle EDM = \alpha$, y por ser $\angle MBA$ semiinscrito en el arco menor MB, se tiene que $\angle BDM = \angle ABM = \alpha$. Análogamente $\angle EAB = \angle ECM = \angle MAB = \beta$. Así $\triangle MAB \cong \triangle EAB$ (ALA), luego $MA = AE$ y $MB = BE$, luego AB es bisectriz y también mediatriz en los triángulos isósceles AME y BME, entonces $\overline{ME} \perp \overline{AB}$, y ya que

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow \angle EMQ = 90$.

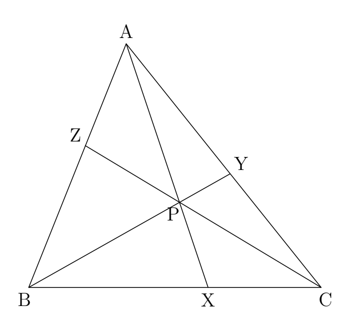
Sea $T = \overleftrightarrow{NM} \cap \overline{AB}$, luego, por potencia de T sobre Ω_1 y Ω_2, respectivamente, se tiene que $TA^2 = TM \cdot TN$ y $TB^2 = TM \cdot TN$, luego $TA = TB$. Y como $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, se tiene $\triangle NAB \sim \triangle NPQ$, y como T es punto medio de $\overline{AB}$, entonces M lo es de $\overline{PQ}$. Luego $\triangle EMP \cong \triangle EMQ$ (LAL), luego $EP = EQ$, que es lo pedido ■

2.4. Colinealidad y Concurrencia

El segmento de línea comprendido entre un vértice de un triángulo y cualquier punto dado en el lado opuesto (o su prolongación) es llamado *ceviana*. Entonces, si X, Y, Z son los respectivos puntos de los lados BC, CA, AB de un $\triangle ABC$, los segmentos AX, BY, CZ son cevianas.

Teorema de Ceva. *Si tres cevianas AX, BY, CZ, pasan cada una por un vértice distinto del triańgulo ABC y son concurrentes, entonces:*

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$



Cuando decimos que tres líneas (o segmentos) concurren, significa que todas pasan por mismo un punto, que llamaremos P. Para probar el Teorema de Ceva, recordemos que las areas de triángulos con igual altura son proporcionales a las bases de los triángulos. Respecto a la figura, tenemos que:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{(ABX)}{(AXC)} = \frac{(PBX)}{(PXC)} = \frac{(ABX) - (PBX)}{(AXC) - (PXC)} = \frac{(ABP)}{(CAP)}$$

Análogamente,

$$\frac{CY}{YA} = \frac{(BCP)}{(ABP)} \quad \text{y} \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{(CAP)}{(BCP)}$$

Multiplicando obtenemos:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{(ABP)}{(CAP)} \cdot \frac{(BCP)}{(ABP)} \cdot \frac{(CAP)}{(BCP)} = 1.$$

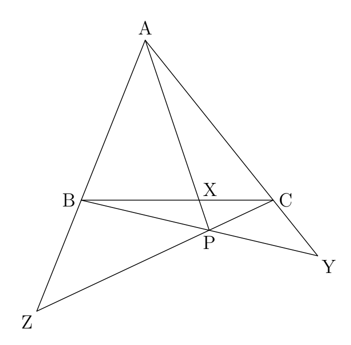
El recíproco de este teorema dice:

Corolario. Si tres cevianas AX, BY, CZ, satisfacen que:

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1$$

entonces son concurrentes.

Nota: Ambos teoremas son válidos cuando las cevianas cortan a las prolongaciones de los lados y/o concurren en un punto fuera del triángulo, como en la figura:



Teorema de Menelao. *Si los puntos X, Y, Z en los lados BC, CA, AB (o en sus prolongaciones) de un $\triangle ABC$ son colineales, entonces:*

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZB} \;=\; 1$$

Recíprocamente, si esta ecuación es válida para los puntos X, Y, Z en los tres lados, entonces estos tres puntos son colineales.

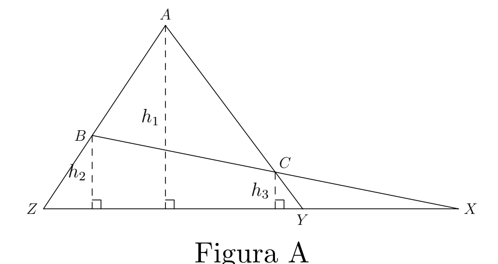


Figura A

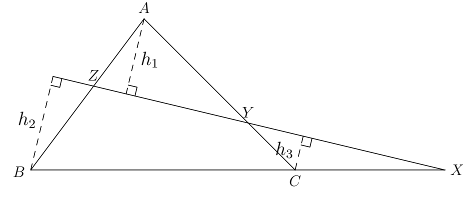


Figura B

Dada la colinealidad de X, Y, Z, como en la figura A B, sean h_1, h_2, h_3 las medidas de las perpendiculares de A, B, C a la recta XY. Por Thales:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{h_2}{h_3}, \ \frac{CY}{AY} = \frac{h_3}{h_1}, \ \frac{AZ}{BZ} = \frac{h_1}{h_2}$$

Ahora multiplicando obtenemos lo pedido.

Al igual que con el Teorema de Ceva, el recíproco de este teorema es cierto.

Corolario. Si tenemos que X, Y, Z están en los tres lados tal que:

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{ZB} \ = \ 1$$

entonces X, Y, Z son colineales.

Sea Z' el punto de intersección de AB y XY. Entonces:

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} \ = \ 1$$

Luego:

$$\frac{AZ'}{BZ'} = \frac{AZ}{BZ}$$

O sea Z coincide con Z', y probamos que X, Y, Z son colineales.

Si le damos sentido a los trazos tenemos:

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ'}{Z'B} \ = \ -1.$$

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Sea* $ABCD$ *un paralelógramo. Consideramos dos puntos,* $E \in \overline{BC}$ *y* $F \in \overline{AD}$*. Sean* $G = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{BF}$ *y* $H = \overleftrightarrow{ED} \cap \overleftrightarrow{CF}$*. Pruebe que la recta* $\overleftrightarrow{GH}$ *biseca al paralelógramo.*

(Mathematical Quickies-Charles W. Trigg)

Propuesto 2. *Dado un* $\triangle ABC$ *escaleno, se llaman* A', B' *y* C' *a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos* $\angle A, \angle B$ *y* $\angle C$ *con los lados opuestos, respectivamente. Sean:*

A'' *la intersección de* $\overleftrightarrow{BC}$ *con la mediatriz de* $\overline{AA'}$.
B'' *la intersección de* $\overleftrightarrow{AC}$ *con la mediatriz de* $\overline{BB'}$.
C'' *la intersección de* $\overleftrightarrow{AB}$ *con la mediatriz de* $\overline{CC'}$.

Muestre que A'', B'' *y* C'' *son colineales.*

(OIM 2004)

Propuesto 3. *Sean* ABC *un triángulo con incentro* I *y* Ω *una circunferencia de centro* I*, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sea* X_1 *el punto de intersección de* Ω *con la recta* AB *más cercano a* B*;* X_2, X_3 *los puntos de intersección de* Ω *con la recta* BC *siendo* X_2 *más cercano a* B*; y* X_4 *el punto de intersección* Ω *con la recta* CA *más cercano a* C*. Sea* K *el punto de intersección de las rectas* X_1X_2 *y* X_3X_4*. Demuestre que la recta* AK *pasa por el punto medio del segmento* X_2X_3*.*

(OIM 2007)

Propuesto 4. *Sea* ABC *un triángulo escaleno. Sean* D *y* E *los puntos donde las bisectrices interiores de* $\angle A$ *y* $\angle B$ *cortan a* $\overline{BC}, \overline{AC}$*, respectivamente, y sea* F *el punto de corte entre la bisectriz exterior del* $\angle C$ *y* $\overleftrightarrow{AB}$*. Pruebe que* D, E, F *son colineales.*

(Coxeter, Geometry Revisited)

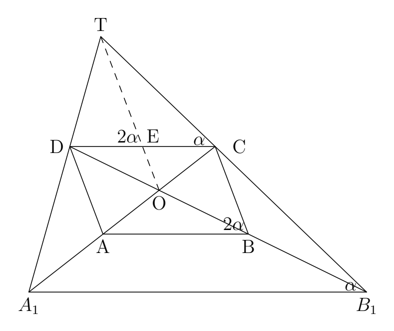
Propuesto 5. *(Recta de Gauss) Una recta corta a los lados* AB, BC *y a la prolongación del lado* AC *del* $\triangle ABC$*, respectivamente, en los puntos* D, E *y* F*. Demuestre que los puntos medios de los segmentos* CD, AE *y* BF *se encuentran en una recta.*

Problemas Resueltos

Problema. *Sea O el centro del paralelógramo $ABCD$, con $\angle AOB > 90^o$. Tomamos los puntos A_1 y B_1 en $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ respectivamente, de manera que A_1 esté al mismo lado de O que A, B_1 esté al mismo lado de O que B, y de tal forma que $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y además $\angle A_1B_1C = \angle ABC/2$. Demuestre que $\overleftrightarrow{A_1D} \perp \overleftrightarrow{B_1C}$.*

(Verano Matemático 2008)

Solución:



Sea $\angle A_1B_1C = \alpha \rightarrow \angle ABC = 2\alpha$. Como $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ y $ABCD$ es paralelógramo, se tiene que $\overleftrightarrow{A_1B_1} \parallel \overleftrightarrow{DC} \Rightarrow \angle CB_1A_1 = \angle TCD = \alpha$, donde $T = \overleftrightarrow{A_1D} \cap \overleftrightarrow{B_1C}$.

Sea $E = \overleftrightarrow{TO} \cap \overline{DC}$. Por el Teorema de Ceva aplicado al $\triangle TDC$ con respecto a las cevianas $\overleftrightarrow{TE}, \overline{CA_1}$ y $\overline{DB_1}$ que concurren en O, se tiene lo siguiente:

$$\frac{TA_1}{A_1D}\frac{DE}{EC}\frac{CB_1}{B_1T} = 1$$

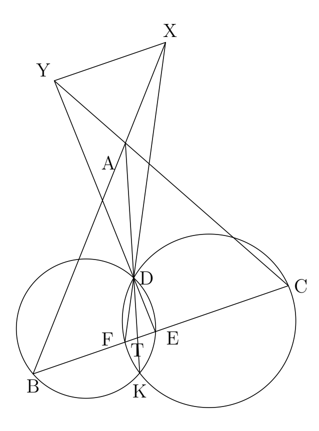
$$\frac{TA_1}{A_1D}\frac{DE}{EC} = \frac{B_1T}{CB_1}$$

Pero $\dfrac{TA_1}{A_1D} = \dfrac{B_1T}{CB_1}$ por Teorema de Thales ($\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{A_1B_1}$), así $\dfrac{DE}{EC} = 1$. Pero también $\dfrac{AO}{OC} = 1$ (ya que las diagonales de un paralelógramo se dimidian), luego $\dfrac{DE}{EC} = \dfrac{AO}{OC} = 1 \Rightarrow \overleftrightarrow{OE} \parallel \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow \angle CBA = \angle TED = 2\alpha$.

Note ahora que $\angle TCE + \angle CTE = 2\alpha$, y como $\angle TCE = \alpha$, se sigue que $\angle CTE = \alpha$, y por lo tanto $EC = ET$. También se tenía que $EC = ED$, así que $EC = ED = ET$, lo que implica $\angle DTC = 90$, o sea $\overleftrightarrow{A_1D} \perp \overleftrightarrow{B_1C}$, probando lo pedido ■

Problema. *Considere un punto D en el interior del triángulo ABC. Se trazan las circunferencias w_1 y w_2 de modo que w_1 pase por B y D, w_2 pase por C y D, además la segunda intersección de las circunferencias (distinta a D) pertenece a la recta AD. Sean $E = w_1 \cap \overline{BC}, F = w_2 \cap \overline{BC}, X = \overleftrightarrow{DF} \cap \overleftrightarrow{AB}, Y = \overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AC}$. Pruebe que $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{XY}$.*

Solución:



Sea $T = \overline{BC} \cap \overleftrightarrow{AD}$ y $K = w_1 \cap w_2$, $K \neq D$. Por potencia de T sobre w_1 se tiene que $BT \cdot TE = DT \cdot TK$. De la misma forma, por potencia de T sobre w_2, se tiene que $TF \cdot CT = DT \cdot TK$. De este modo, se sigue que

$$BT \cdot TE = TF \cdot CT$$

$$(BF + FT)TE = TF(CE + ET)$$

$$BF \cdot TE + FT \cdot TE = TF \cdot CE + TF \cdot ET$$

$$BF \cdot TE = TF \cdot CE$$

$$\boxed{\frac{BF}{FT} = \frac{CE}{ET}} \; (i)$$

Ahora, por el Teorema de Menelao aplicado al triángulo TAB con respecto a los puntos D, X, F:

$$\boxed{\frac{TD}{DA}\frac{AX}{XB}\frac{BF}{FT} = 1} \; (ii)$$

De igual modo, por el Teorema de Menelao aplicado al triángulo TAC con respecto a los puntos D, Y, E se cumple que:

$$\boxed{\frac{TD}{DA}\frac{AY}{YC}\frac{CE}{ET} = 1}\ (iii)$$

Igualando (ii) y (iii), simplificando y usando (i):

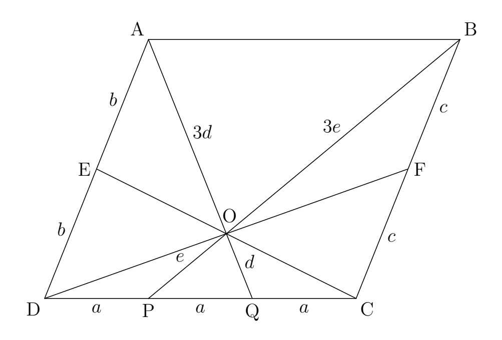
$$\frac{TD}{DA}\frac{AX}{XB}\frac{BF}{FT} = \frac{TD}{DA}\frac{AY}{YC}\frac{CE}{ET}$$
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YC}$$
$$AX \cdot YC = AY \cdot XB$$
$$AX(AY + AC) = AY(AB + XA)$$
$$AX \cdot AY + AX \cdot AC = AY \cdot AB + AY \cdot XA$$
$$AX \cdot AC = AY \cdot AB$$
$$\boxed{\frac{AX}{AB} = \frac{AY}{AC}}\ (iv)$$

Considerando la igualdad (iv) y que $\angle XAY = \angle BAC$ por ser opuestos por el vértice, se deduce que $\triangle AXY \sim \triangle ABC$, de donde $\angle AXY = \angle BAC \rightarrow BC \parallel XY$, como se pedía ■

Problema. *En el cuadrilátero convexo $ABCD$, E, F son puntos medios de $\overline{AD}, \overline{BC}$, respectivamente. $\overline{CE} \cap \overline{DF} = O$. Si $\overrightarrow{AO}$ y $\overrightarrow{BO}$ trisecan $\overline{CD}$, pruebe que $ABCD$ es un paralelógramo.*

(OMCS 2006)

Solución:



Sean $DP = PQ = QC = a$, $AE = ED = b$, $BF = FC = c$. Por el Teorema de Menelao al $\triangle ADQ$ con respecto a $\overleftrightarrow{EOC}$:

$$\frac{b}{b} \cdot \frac{3a}{a} \cdot \frac{QO}{OA} = 1 \Rightarrow 3QO = OA$$

Nuevamente por el Teorema de Menelao al $\triangle BCP$ con respecto a $\overleftrightarrow{FOD}$:

$$\frac{c}{c} \cdot \frac{3a}{a} \cdot \frac{PO}{OB} = 1 \Rightarrow 3PO = OB$$

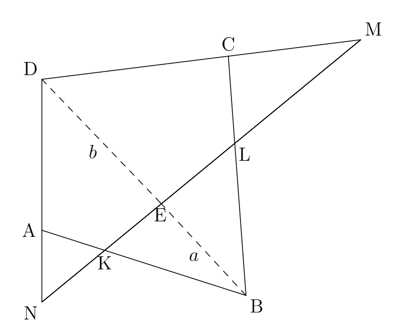
Luego, por LAL $\triangle OBA \sim \triangle OPQ$ en la razón $3:1$, entonces $\angle OPQ = \angle OBA \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$, también $BA : PQ = 3 : 1 \Rightarrow BA = 3a$. Por lo tanto $BA = DC$, y como $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, se tiene que $ABCD$ es un paralelógramo, probando lo pedido ■

Problema. *Los lados AB, BC, CD y DA de un cuadrilátero son cortados por una recta ℓ en los puntos K, L, M y N, respectivamente. Demuestre que:*

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

(Verano Matemático 2008)

Solución:



Consideremos el cuadrilátero de la figura. Tracemos la diagonal $\overline{BD}$, que corta a la recta ℓ en el punto E. Sean $BE = a$ y $ED = b$. Por el Teorema de Menelao en el $\triangle BDA$ con respecto a la recta $\overleftrightarrow{EKN}$, se tiene que:

$$\boxed{\frac{AK}{KB}\frac{a}{b}\frac{DN}{NA} = 1}\ (i)$$

Además, por el Teorema de Menelao en el $\triangle BCD$ con respecto a la recta $\overleftrightarrow{ELM}$, se sigue:

$$\boxed{\frac{BL}{LC}\frac{CM}{MD}\frac{b}{a} = 1}\ (ii)$$

Haciendo $(i) \cdot (ii)$, se obtiene que:

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} = 1$$
$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MD} \cdot \frac{DN}{NA} = 1$$

Probando lo pedido ■

Capítulo 3

Álgebra

3.1. Principio de Inducción Matemática

Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene una proposición p_n que puede ser verdadera o falsa, de modo que:

a) p_1 es verdadera y

b) para un k cualquiera en $\mathbb{N}$, podemos suponer que p_k es verdadera y basados en eso demostrar que p_{k+1} es verdadera.

Entonces se cumple que p_n es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema. *Demostrar que* $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ *es divisible por* 13.

Solución:

Verificamos a) p_1: $4^{2\cdot 1+1} + 3^{1+2} = 64 + 27 = 91 = 13 \cdot 7$ es verdadera

Verificamos b) Supongamos que p_k: $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ es divisible por 13. Ahora veamos que pasa con

$$\begin{aligned} p_{k+1}: \; 4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} &= 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} \\ &= 16 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} \\ &= (13+3)4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} \\ &= \underbrace{13 \cdot 4^{2k+1}}_{\text{divisible por 13}} + 3\underbrace{(4^{2k+1} + 3^{k+2})}_{\text{divisible por 13}} \end{aligned}$$

$\therefore \; p_n$ es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

Problema. *Encontrar el término general de la sucesión dada por*

$$u_1 = 3$$
$$u_2 = 5$$
$$u_n = 3 \cdot u_{n-1} - 2 \cdot u_{n-2}, \ \forall n \geq 3$$

Solución:

Si examinamos

$$u_3 = 15 - 6 = 9$$
$$u_4 = 27 - 10 = 17$$
$$u_5 = 51 - 18 = 33$$
$$\vdots$$

podemos conjeturar que $u_n = 2^n + 1$.

Demostraremos por el Principio de Inducción:

a) p_1: $u_1 = 3 = 2^1 + 1$ y p_2: $u_2 = 5 = 2^2 + 1$

b) Suponiendo que

$$p_{k-1} : \ u_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \text{ y } p_k : \ u_k = 2^k + 1.$$

Demostraremos que $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$.

Tenemos que $u_{k+1} = 3u_k - 2u_{k-1}$, entonces

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) \\ &= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \\ &= 3 \cdot 2^k - 2^k + 1 \\ &= 2 \cdot 2^k + 1 \\ &= 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

$\therefore$ p_n es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$

Nota: Observemos que como supusimos verdadero para dos naturales consecutivos $(k-1, \ k)$, entonces debemos tener dos casos bases consecutivos

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Demostrar que* $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ *es divisible por* 133 *para todo* n *natural.*

Propuesto 2. *Demostrar que* $(1 + x)^n \geq 1 + nx\ \forall \in \mathbb{N}$.

Propuesto 3. *La sucesión de Fibonacci* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ *se define de manera recursiva como*

$$f_1 = 1\ ;\ f_2 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}\ \forall n > 2$$

Demostrar que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Propuesto 4. *¿Para qué valores de* n *se tiene que* $2^n > n^2$*?*

3.2. Sumatorias

Las sumatorias corresponden a una notación que permite escribir en forma compacta largas sumas de términos que tienen "algo en común", más específicamente sirven para evaluar expresiones que dependen de una variable que se mueve en los números naturales. Se representan con la letra griega Σ y se debe indicar en la parte inferior, la variable, desde que número comienza y en la parte superior, hasta que número se evalua. Algunos ejemplos:

$$i)\ \sum_{i=1}^{9} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$ii)\ \sum_{j=1}^{4} 3j = 3 + 6 + 9 + 12$$

Las propiedades de la suma se reconocen en las sumatorias:

- Separación de la suma

$$\sum_{i=j}^{k} (a_i + b_i) = \sum_{i=j}^{k} a_i + \sum_{i=j}^{k} b_i$$

- Factorización de una constante c (cuando el factor no depende del índice)

$$\sum_{i=j}^{k} ca_i = c\sum_{i=j}^{k} a_i$$

- Suma de una constante c

$$\sum_{i=j}^{k} c = c(k-j+1)$$

- Corrimiento de índice (para $l \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = \sum_{i=j+l}^{k+l} a_{i-l}$$

Algunas sumatorias útiles, demostrables por inducción son las siguientes:

- Suma de los primeros n naturales

$$\sum_{i=0,1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Suma de los cuadrados de los primeros n naturales

$$\sum_{i=0,1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Suma de los cubos de los primeros n naturales

$$\sum_{i=0,1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

- Suma de las potencias de un número

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Sumatorias telescópicas

Son aquellas sumatorias que al expandirlas van restando sus términos, reduciéndose finalmente a sólo dos de ellos. En general sería:

$$\sum_{i=j}^{k}(a_i - a_{i+1}) = a_j - a_{k+1}$$

Algunos ejemplos son:

- $\sum\limits_{i=j}^{k} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right) = \sum\limits_{i=j}^{k} \ln\left(\frac{i+1}{i}\right) = \sum\limits_{i=j}^{k} \ln(i+1) - \ln(i) = \ln(k+1) - \ln(j)$

- $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Problema. *Sean $n, r \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq n < r$. Pruebe que*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^n \binom{r-1}{n}$$

sin usar inducción.

(fcfm, Universidad de Chile, 2001)

Solución:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\binom{r-1}{k-1} + \binom{r-1}{k}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \binom{r-1}{k} - (-1)^{k-1}\binom{r-1}{k-1}\right] \\
&= (-1)^n \binom{r-1}{n} - (-1)^{-1}\binom{r-1}{-1} \\
&= (-1)^n \binom{r-1}{n}
\end{aligned}$$

Progresiones Aritméticas

Corresponden a sucesiones donde cada término se obtiene sumando una constante al término anterior. Matemáticamente hablando se definen:

$$a_0 = A$$
$$a_n = d + a_{n-1}$$

Mediante las sumas conocidas, se pueden calcular fácilmente los primeros k términos de una $P.A$:

$$\sum_{i=j}^{k} A + di = A\sum_{i=j}^{k} 1 + d\sum_{i=j}^{k} i = A(k-j+1) + d\sum_{i=j}^{k} i$$

En particular si $j = 0$:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i = A(k+1) + \frac{dk(k+1)}{2}$$

Progresiones Geométricas

Corresponden a sucesiones donde cada término se obtiene multiplicando una constante al término anterior. Matemáticamente hablando se definen:

$$a_0 = A$$
$$a_n = ra_{n-1}$$

Podemos calcular la suma de términos de una $P.G$ usando las propiedades ya vistas:

$$\sum_{i=j}^{k} Ar^k = A\sum_{i=j}^{k} r^k$$

En particular si $j = 0$:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i = A\frac{r^{k+1}-1}{r-1}$$

Sumas dobles

Corresponden a sumatorias donde el término a sumar es también una sumatoria. Cuando los índices son completamente independientes entre sí, éstas tienen la propiedad de poder intercambiarse, es decir:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} a_{ij} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}$$

Esto puede generalizarse para más sumatorias, donde siempre que los índices sean independientes, se pueden intercambiar como se desee.

Binomio de Newton

El binomio de Newton es una poderosa herramientas que a través de sumatorias y coeficientes binomiales nos permite calcular la potencia n-ésima de un binomio (con $n \in \mathbb{N}$). Formalmente se tiene que:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Notemos que de aquí se desprende usando $x = y = 1$ que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Problema. *Demuestre que* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k$$

Solución:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-x)^{j-1}$$
$$= \frac{-1}{x}\left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-x)^j - 1\right) = \frac{-1}{x}\left((1-x)^n - 1\right)$$
$$= \frac{-(1-x)^{n+1}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x} = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k$$

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Si* $A_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$ *y* $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k$.
Pruebe que $\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} A_i = 2^n B_n$

(Olimpiada Matemática Húngara)

Propuesto 2. *Calcule el valor de la suma*

$$S = \sum_{k=0}^{49} (-1)^k \binom{99}{2k} = \binom{99}{0} - \binom{99}{2} + \binom{99}{4} \cdots \binom{99}{98}$$

(Problema 29,AHSME 1989)

3.3. Polinomios

Diremos que un polinomio es una función que va desde un cuerpo $\mathbb{K}$ a otro cuerpo $\mathbb{K}$ (podría ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), de modo que:

$$\begin{aligned} p:\ & \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \to & p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \end{aligned}$$

Definición. : Llamaremos grado de un polinomio p o $grad(p)$ al mayor exponente de x.

Ejemplo 1: $p(x) = x^2 + x + 3$, $grad(p) = 2$

Ejemplo 2: $q(x) = x^7 + x^5 + x^3 + x$, $grad(q) = 7$

Ejemplo 3: $r(x) = 5$, $grad(r) = 0$

Nota: Si $p(x) = 0$ diremos que $grad(p) = \infty$.

Proposición. *Diremos que dos polinomios* $p(x)$ *y* $q(x)$ *son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales.*

Factorización en $\mathbb{C}$

Sea $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ luego existen $\alpha, c_1, c_2, ...c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, l_2, ..., l_m \in \mathbb{N}$ tales que:

$$p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1}(x - c_2)^{l_2} \cdots (x - c_m)^{l_m}$$

Raíces de un polinomio: Diremos que x_0 raíz del polinomio p si $p(x_0) = 0$ (notar que $c_1, c_2, ...c_m$ son raíces del polinomio p)

Teorema Fundamental del Álgebra. *Sea $p(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ con $a_i \in \mathbb{C}$ y $grad(n) \leq 1$. Entonces p posee n raíces (no necesariamente distintas) en $\mathbb{C}$*

Relaciones de Cardano-Vieta

Notemos que un polinomio de grado 3 tiene la siguiente forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1)$$

De igual forma por el teorema de la factorización en $\mathbb{C}$:

$$p(x) = a_0(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \quad (2)$$

Desarrollando (2) llegamos a:

$$p(x) = a_0(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = a_0x^3 - a_0(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a_0(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x - a_0\alpha\beta\gamma)$$

De esta forma, por la igualdad de polinomios tenemos que:

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{a_0}{a_3}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{a_1}{a_3}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{a_2}{a_3}$$

Estas propiedades son generalizables para polinomios de grado n siguiendo el mismo procedimiento anterior.

Si las raíces de $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n$ son $r_1,\ r_2, \ldots,\ r_n$ tenemos:

$$r_1r_2r_3 \ldots r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$r_1r_2r_3 \ldots r_{n-1} + \cdots + r_2r_3 \ldots r_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1r_2r_3 \ldots r_j + \cdots + r_{n-j+1}r_{n-j+2} \ldots r_n = (-1)^j \frac{a_{n-j}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

Donde en cada ecuación se sumarán todos los posibles productos de j términos.

3.4. Funciones

Definición. Consideraremos *función* como un caso de relación o de correspondencia matemática entre dos conjuntos $X,\ Y$, donde a cada $x \in X$ le corresponde un úncio $y \in Y$, que denotamos $y = f(x)$, y que se lee "y función de x". Diremos entonces que $f : X \to Y$, que se lee "f de X en Y".

Exigiremos que se cumplan las siguientes condiciones:

- **De Existencia**: $\forall x \in X, \exists y \in Y : y = f(x)$
- **De Unicidad**: Si $y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$

Al conjunto X lo llamaremos *Conjunto de entrada* o *Dominio*, y se anota $Dom(f)$. A los elementos del dominio se les llama argumentos de la función.

Al conunto Y se le llama *Conjunto de llegada* o *Codominio* de f, y se anota $Codom(f)$. A los elementos $y \in Y$ tales que $y = f(x)$ para algún x en el dominio se les llama imágenes de f, y al conjunto de todas las imágenes se le llama *Imagen* o *Recorrido* de la función, que se anota $Rec(f)$.

Ejemplos:

1. Sea f tal que $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Para esta función se tiene:
   $Dom(f) = \mathbb{R} - 1,\ Rec = \mathbb{R} - 1$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, tal que:

   $$f(x) = \begin{cases} x & , \text{si } x \geq 0 \\ -x & , \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Esta función se denota $f(x) = |x|$, y se llama *módulo* o *valor absoluto*.

Propiedades

1. Si $\forall x_1, x_2 \in Dom(f), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, o sea la función es uno a uno, entonces diremos que es *Inyectiva*.

2. Si $\forall y \in Codom(f), \exists x \in Dom(f) : y = f(x)$, entonces diremos que f es *Epiyectiva* o *Sobreyectiva*. En este tipo de funciones $Codom(f) = Rec(f)$.

3. Si f es inyectiva y epiyectiva, diremos que f es *Biyectiva*.

Ejemplos:

- $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R}_0^+)$ es inyectiva.
- $f(x) = x^3 - x$ es epiyectiva.
- $f(x) = mx + n$ es biyectiva.

Paridad

Se dice que una función es par si $\forall x \in Dom(f), -x \in Dom(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)$.

Se dice que una función es impar si $\forall x \in Dom(f), -x \in Dom(f) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$.

Cuando una función no cumple ninguna de las condiciones anteriores se dice que no tiene paridad.

Ejemplos:

- $f(x) = \cos(x),\ g(x) = x^2,\ h(x) = |x|$ son funciones pares.
- $f(x) = \sin(x),\ g(x) = x^3,\ h(x) = x$ son funciones impares.
- $f(x) = x + 1,\ g(x) = x^2 + x - 2$ son funciones sin paridad.

Crecimiento

La función f es *creciente* en $[a, b]$ si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq (x_2)$.

La función f es *estrictamente creciente* en $[a, b]$ si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < (x_2)$.

La función f es *decreciente* en $[a, b]$ si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq (x_2)$.

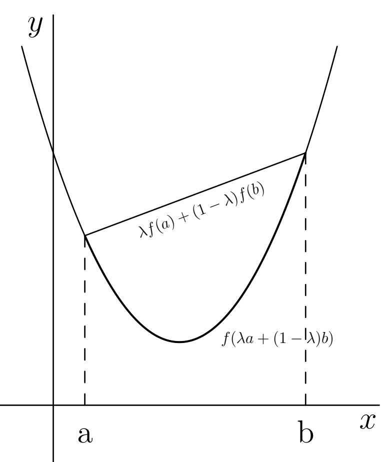
La función f es *estrictamente decreciente* en $[a, b]$ si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \geq (x_2)$.

Si la función es estrictamente creciente o decreciente entonces se dice *monótona*. Notemos que la monotonía de una función implica que ésta es inyectiva.

Periodicidad

Una función es periódica si y sólo si $f(x) = f(x + kt)$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$. Diremos que t es el período de f.

Ejemplo:
. $\sin(x), \cos(x)$, y en general todas las funciones trigonométricas son periódicas.



Concavidad

Una función es convexa en un intervalo $[a, b]$, si y sólo si
$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$.

Una función es cóncava en un intervalo $[a, b]$, si y sólo si
$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$.

3.5. Números Complejos

Comenzaremos con los números complejos como respuesta a la incapacidad del conjunto de los números reales de dar solución a ciertas ecuaciones tales como:

$$x^2 = -1$$

$$3x^2 + x + 2 = 0$$

Para esto visualizaremos a este nuevo conjunto como un plano cartesiano donde tendremos un *eje real* y un *eje imaginario* y cada número complejo corresponderá a un "punto en ese plano". Esta representación nos permitirá visualizar más fácilmente las propiedades de estos números.

Análogamente a los números reales, en los complejos están definidas las operaciones $+, \cdot$ y constituyen un Cuerpo, esto quiere decir, que ambas operaciones son aditivas, asociativas, existe un único elemento neutro para cada operación, la multiplicación distribuye con respecto a la suma, entre otras propiedades. Vemos entonces que los Reales son sólo una "*recta*" (el eje x) en el inmenso plano de los complejos, que hereda todas las propiedades de este conjunto más grande.

Notación y operaciones

La primera manera de escribir un número complejo guarda relación con las coordenadas cartesianas que éste ocupa en el plano. Se tiene entonces que si el número z ocupa las coordenadas (a, b)(con $a, b \in \mathbb{R}$) éste se notará como $a + bi$. Donde $i = \sqrt{-1}$, este número es la llamada *unidad imaginaria*; a corresponde a la *parte real* de z (se nota $Re(z) = a$) y b a la *parte imaginaria* de z ($Im(z) = b$). Esta notación es la más cómoda a la hora de realizar adiciones. Veamos cómo se realiza.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

En otras palabras, corresponde a sumar las partes real e imaginaria por separado. Gráficamente podemos considerar cada número como un vector que va desde el origen del sistema hasta la posición del número. En ese caso la suma corresponde a la simple suma de vectores(mediante métodos como el polígono o el paralelogramo).

La multiplicación es en apariencia un poco más díficil, pero corresponde simplemente a la multiplicación de dos binomios. Veamos cómo:

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(c+di) &= ac+adi+cbi+bdi^2\\ &= ac+adi+cbi-bd\\ &= (ac-bd)+(ad+cb)i\end{aligned}$$

Como es esperable, los neutros de las operaciones $+,\cdot$ son 0 y 1 respectivamente. Mientras que $z-z=0$ ($z=a+bi \Rightarrow -z=-a-bi$) y $z\cdot z^{-1}=1$, pero para comprender el inverso de un complejo, necesitamos introducir un par de conceptos nuevos.

Conjugación y módulo

El *conjugado* de un número complejo z es un elemento muy útil a la hora de facilitar los cálculos. Su notación es $\overline{z}$. Gráficamente lo definiremos como el reflejo del punto (que representa al número) con respecto al eje x. Numéricamente, tenemos que si $w=a+bi$ entonces $\overline{w}=a-bi$. Algunas propiedades fácilmente demostrables son las siguientes:

- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
- $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$

Definimos el *módulo* de un número w como la distancia de éste al origen del plano cartesiano, lo notaremos $|w|$ y corresponde entonces al tamaño del vector que une el origen con la ubicación del número en el plano $\mathbb{R}^2$. Usando el teorema de Pitágoras se puede calcular fácilmente el módulo de un complejo:

$$z=a+bi\Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Algunas propiedades de módulo:

- $|Re(z)| \leq |z|, |Im(z)| \leq |z|$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

Introducimos finalmente el inverso multiplicativo:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Forma Polar

Otra manera de representar un número complejo es mediante la llamada "*forma polar*", donde (siguiendo con la representación gráfica) se entregan datos sobre el vector que une el origen con la "ubicación" del número. Estos datos corresponden al tamaño del vector (módulo del número) y al ángulo que éste forma con el eje x. Diremos entonces que si $|z| = R$ y el ángulo que forma con la horizontal es θ entonces lo escribiremos como $z = Re^{i\theta}$. Usando trigonometría se puede llevar a la notación anterior:

$$Re^{i\theta} = R(cos\theta + isen\theta) = z$$

Es importante notar que $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ y que este número tiene todas las propiedades esperables de las potencias en $\mathbb{R}$, en particular es destacable la fórmula de De Moivre:

$$\begin{aligned} (e^{i\theta})^n &= e^{i(n\theta)} \\ \Rightarrow (cos\theta + isen\theta)^n &= cos(n\theta) + isen(n\theta) \end{aligned}$$

Raíces de un complejo

Llamaremos raíces n-ésimas de un complejo z al conjunto solución de la ecuación:

$$x^n = z$$

Para trabajar esta ecuación es conveniente utilizar la forma polar de los números complejos, por lo que reescribiremos la ecuación, usando $z = Re^{i\theta}$ y $x = re^{i\phi}$:

$$\begin{array}{rcl} x^n & = & z \\ \Rightarrow (re^{i\phi})^n & = & Re^{i\theta} \\ \Rightarrow r^n e^{i(\phi n)} & = & Re^{i\theta} \\ \Rightarrow r^n = R & \wedge & e^{i(\phi n)} = e^{i\theta} \\ \Rightarrow r = \sqrt[n]{R} & \wedge & e^{i(\phi n)} = e^{i\theta} \end{array}$$

Notemos que como $r, R \in \mathbb{R}$ la primera ecuación tiene una sola solución, pero esto no se cumple para la segunda ecuación. A simple vista podría parecer que tiene infinitas ecuaciones, pero en realidad sólo tiene n soluciones de la siguiente forma:

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Finalmente concluimos que:

$$x = \sqrt[n]{R}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Problema. *Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación:*

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3}$$

(fcfm, Universidad de Chile, 2008)

Solución:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} &- \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow \left(cos(\frac{-\pi}{6})+isen(\frac{-\pi}{6})\right)^{2n} &- \left(cos(\frac{\pi}{6})+isen(\frac{\pi}{6})\right)^{2n} = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow e^{\frac{-i2n\pi}{6}} &- e^{\frac{i2n\pi}{6}} = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow e^{\frac{-in\pi}{3}} &- e^{\frac{in\pi}{3}} = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow (cos(\frac{-n\pi}{3})+isen(\frac{-n\pi}{3})) &- (cos(\frac{n\pi}{3})+isen(\frac{n\pi}{3})) = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow (cos(\frac{n\pi}{3})-isen(\frac{n\pi}{3})) &- (cos(\frac{n\pi}{3})+isen(\frac{n\pi}{3})) = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow (cos(\frac{n\pi}{3})-isen(\frac{n\pi}{3})) &- cos(\frac{n\pi}{3})-isen(\frac{n\pi}{3}) = i\sqrt{3} \\
\Rightarrow -2isen(\frac{n\pi}{3}) &= i\sqrt{3} \\
\Rightarrow sen(\frac{n\pi}{3}) &= \frac{-\sqrt{3}}{2} \\
\Rightarrow \frac{n\pi}{3} &= \left\{(-1)^k\frac{-\pi}{3}+k\pi\right\} \\
\Rightarrow n &= \left\{(-1)^{k+1}+3k\right\} \\
\Rightarrow n &= [4]_6 \cup [5]_6
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Para* $z \in \mathbb{C}$ *y* $Re(z), Im(z) \neq 0$ *se tiene que*

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3} \in \mathbb{R}$$

Demuestre que $|z| = 1$

(Giannis, Mathlinks)

Propuesto 2. *Dado* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $z+\frac{1}{z} = 2cos3^o$, *encuentre el menor entero mayor que* $z^{2000}+\frac{1}{z^{2000}}$

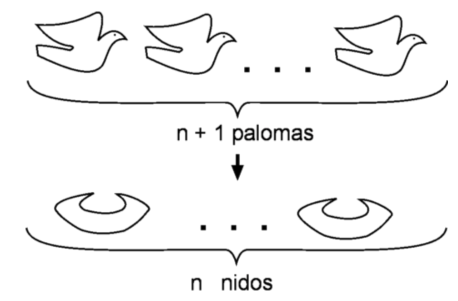
(AIME 2 2000,#9)

Capítulo 4

Combinatoria y otros

4.1. Principio del Palomar

El Principio del Palomar [1] es una herramienta que permite resolver la mayoría de los problemas de existencia, es decir, los problemas del tipo *"Demuestre que existen al menos…"*. La forma simple del Principio del Palomar enuncia:



Principio del Palomar. *Si $n+1$ palomas se posan sobre n nidos, entonces habrá al menos un nido con al menos dos palomas.*

O sea que si tenemos n conjuntos y $n+1$ elementos que agrupar, entonces tendremos al menos un conjunto con dos o más elementos.

Ejemplo. En un cine hay 367 personas, si agrupamos a las personas (palomas) en conjuntos (nidos), de acuerdo a su día de cumpleaños, entonces por Principio del Palomar sabemos que hay al menos dos personas que nacieron el mismo día del año.

[1] también conocido como Principio de los Casilleros o Principio de Dirichlet

Problema. *Sea el conjunto* $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$*. Demuestre que si se eligen* 11 *números entonces hay al menos dos cuya diferencia es* 10*.*

Solución:

Sean los conjuntos:

$$A_1 = \{1, 11\}$$

$$A_2 = \{2, 12\}$$

$$\vdots$$

$$A_{10} = \{10, 20\}$$

Como tenemos 10 conjuntos (nidos) y 11 números (palomas), entonces hay dos números en un mismo conjunto. Ya que la diferencia de los elementos de cada conjunto es diez, entonces existen dos números cuya diferencia es diez. ■

Pero el Principio del Palomar tiene una forma generalizada, que veremos a continuación.

Principio del Palomar (Generalizado). *Si* $nk+r$ $(0 < r \leq n)$ *palomas se posan sobre* n *nidos, entonces habrá al menos un nido con al menos* $k+1$ *palomas.*

Problema. *Philandia tiene sólo un aeropuerto, pero tiene* 14 *equipos de rugby, con* 13 *jugadores cada uno. Todos ellos tienen que viajar hoy a Santiago, donde se celebra un campeonato, y no han hecho sus reservas . Salen siete vuelos de Philandia a Santiago, y cada uno de ellos tiene* 24 *asientos libres. El jugador Velosov decide que viajará en su helicóptero particular. Demuestre que al menos uno de los equipos podrá llegar completo a Santiago para el torneo.*

Solución:

Notemos que los jugadores que viajan son 169 (168 en avión + 1 en helicóptero) y que $169 = 14 \cdot 12 + 1$, entonces, por Principio del Palomar, hay al menos un equipo en el que viajan 13 jugadores, o sea el equipo completo.■

La dificultad de resolver problemas con el Principio del Palomar es determninar los nidos y las palomas, como veremos en el siguiente problema:

Problema. *Un estudiante quiere entrenar para el Torneo el Número de Oro para lo cual le quedadn* 81 *días. Se propone resolver al menos un problema diario, pero no más de* 132 *en total. Demuestre que hay una cantidad de días consecutivos en los que resuelve exactamente* 29 *problemas.*

Solución:

Sea a_i la cantidad de problemas resueltos hasta el día i.

Notemos que si existen $i,\ j$ tales que $a_i = a_j + 29$, entonces el problema está resuelto, ya que el estudiante resolvió 29 problemas entre los días $j+1$ e i.

Ahora tomemos los siguientes conjuntos:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{81}\}$$
$$B = \{a_1 + 29, a_2 + 29, \ldots, a_{81} + 29\}$$

Notemos que A y B son subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 161\}$

Pero tenemos que entre A y B hay 162 elementos, por lo tanto alguno deberá repetirse. Pero estos no pueden ser del mismo conjunto ya que $a_1 < a_2 < \ldots < a_{81}$.

Entonces, existen $i,\ j$ tales que $a_i = a_j + 29$.■

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Demuestre que en un grupo de n personas ($n > 2$) hay al menos dos que tienen el mismo número de amigos dentro del grupo.*

Nota: Consideraremos la amistad recíproca, es decir, si A es amigo de B , entonces B es amigo de A.

Propuesto 2. *Sean un triángulo ABC y una recta ℓ, tales que ℓ no pasa por A, B, o C. Demuestre que la recta no puede cortar a todos los lados del triángulo.*

Propuesto 3. 31 *invitados a una fiesta se sientan en sillas igualmente espaciadas alrededor de una mesa redonda, pero no se han fijado que en los puntos hay tarjetas con los nombres de los invitados.*

a) Suponiendo que se han sentado con tan mala suerte que ninguno se encuentra en el lugar que le corresponde, muestre que es posible lograr que al menos dos personas queden en su puesto correcto, haciendo girar la mesa sin que nadie se pare de su asiento.

b) Muestre una configuración donde exactamente un invitado está en su lugar asignado y donde de ninguna forma que se gire la mesa es posible lograr que al menos dos queden bien.

(Olimpíada Nacional, Nivel Mayor 2007).

Propuesto 4. *Demuestre que si* n *es un entero que no es divisble ni por* 2 *ni por* 5, *entonces hay un múltiplo de* n *que está escrito sólo por unos.*

Propuesto 5. *Encuentre la mayor cantidad de números que se pueden tomar del conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ *tal que ninguno divida a otro.*

4.2. Introducción a la combinatoria

La combinatoria es una rama de las Matemáticas que básicamente nos enseña a contar, labor que el ser humano ha intentado realizar desde siempre.

A continuación presentaremos los principios y reglas fundamentales en los cuales se sustenta la combinatoria.

Regla de la Multiplicación. Suponga que un procedimiento A se puede realizar de m maneras y que para cada una de ellas, otro procedimiento que llamaremos B se puede realizar de n maneras. Entonces el procedimiento $A \to B$, en ese orden, puede realizarse de $m \cdot n$ maneras.

Obs.1 La regla anterior que es un proceso en 2 etapas, se puede generalizar directamente a un proceso en r etapas.
Obs.2 Es muy importante notar que por la forma en que se genera el proceso anterior, el orden en que se van escogiendo los objetos importa.
Obs.3 La regla anterior es muy importante, ya que de ella se deducen prácticamente todas las fórmulas que daremos a continuación.

Muestras ordenadas.

Las fórmulas que veremos a continuación caen dentro de esta categoría debido a que en ellas el orden es importante. La palabra "muestra" se usa, simplemente, para denotar a un subconjunto de una cierta población.

Variaciones.- Una "variación" es una configuración en la que es posible distinguir un objeto de otro de manera que se es capaz de establecer un ordenamiento. Es posible considerar 2 casos:

1. [**Variaciones con repetición**] Supongamos que tenemos objetos de n tipos y queremos contar todas las filas de tamaño k que podemos formar, pudiendo repetir objetos y diferenciando una configuración de otra si es que los objetos o el orden son diferentes. Este número es:

$$n^k$$

2. [**Variaciones sin repetición**] Supongamos que tenemos objetos de n tipos y queremos contar todas las filas de tamaño k que podemos formar, no pudiendo repetir objetos y diferenciando una configuración de otra si es que los objetos o el orden son diferentes. Este número es:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3. [**Permutaciones**] Una permutación es un caso particular de una variación en el que $k = n$ (es una variación sin repetición) y que corresponderá por ende al número de formas en que podemos formar n objetos en una fila, diferenciando una configuración de otra si es que se cambia el orden.

4. [**Permutaciones con repetición**] Supongamos que tenemos n objetos de k tipos distintos, con n_1 del primer tipo, n_2 del segundo tipo, hasta n_k del k-ésimo tipo, de manera que somos incapaces de diferenciar a objetos del mismo tipo. Nos preguntamos por el número de formas en que se pueden ordenar estos n objetos en una fila. Este número es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Esta última expresión se conoce con el nombre de coeficiente multinomial.

Combinaciones.

A diferencia de las muestras ordenadas, acá no importa el orden, . Sean n objetos distintos, nos preguntamos por la cantidad de filas de tamaño k que podemos establecer con estos n objetos, diferenciándolos solamente si poseen objetos distintos. Este número es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Notemos que la expresión anterior recibe el nombre de coeficiente binomial y se puede interpretar del siguiente modo:

$\binom{n}{k} =$ número de subconjuntos de tamaño k que se pueden sacar de un conjunto de tamaño n.

Problema. *Demuestre que*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Solución:

Primero reescribamos la suma usando la simetría de los coeficientes, es decir,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

Ahora mostremos que la suma anterior representa el número de subconjuntos de tamaño n que se pueden extraer de un conjunto de tamaño $2n$ (esto es, el lado derecho de la fórmula que queremos probar).

Consideremos un conjunto arbitrario, que denotaremos Ω, de $2n$ elementos. Supongamos que n de estos elementos son de color café y el resto, es decir los otros n elementos, son de color verde. Escojamos ahora un subconjunto de Ω de n elementos eligiendo i elementos de color café y $n-i$ elementos de color verde, para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Para un i dado, hay $\binom{n}{i}$ posibles elecciones de un subconjunto de color café e independientemente $\binom{n}{n-i}$ posibles elecciones de un subconjunto de color verde. Así, el número de posibles subconjuntos de Ω de tamao n que se pueden extraer es

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

De la arbitrariedad de Ω se concluye el resultado pedido.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Demuestre que un número natural* $n \geq 1$ *tiene un número impar de divisores (incluidos 1 y si mismo) si y sólo si* $\sqrt{n}$ *es un número entero.*

Propuesto 2. *Sea* B_n *el conjunto de todos los string binarios (un string es una secuencia de letras de un determinado alfabeto, alfabeto que en este caso consta de 2 letras) de tamaño* n*. Dados dos strings* $(a_i)_{i=1}^n$ *y* $(b_i)_{i=1}^n$*, se define la distancia entre ellos como*

$$d((a_i),(b_i)) = \sum_{k=1}^{n} |a_i - b_i|$$

Sea C_n *un subconjunto de* B_n*. El conjunto* C_n *se llama* ***código de corrección perfecto del error*** *(CCPE) de largo* n *y tolerancia* m *si para todo string* (b_i) *en* B_n *hay un único string* (c_i) *en* C_n*, tal que* $d((b_i),(c_i)) \leq m$*. Pruebe que no hay un CCPE de largo 90 y tolerancia 2.*

4.3. Teoría de Grafos

A continuación se darán las definiciones básicas de la teoría de grafos.

Definición 1. [Grafo] Un grafo, que denotaremos G, es una tupla (V, E) donde V y E son conjuntos típicamente finitos que tienen asociados funciones $t, h : E \to V$. El conjunto V denotará al conjunto de nodos y $E \subset V \times V$ denotará el conjunto de arcos del grafo, que se denotará así: $G = (V, E)$. Las letras t (de tail) y h (de head) van a corresponder a la cola y cabeza, respectivamente, de un arco.

Ejemplo. Considere el grafo de la figura:

$V = \{a, b, c\}$ conjunto de nodos
$E = \{1, 2, 3\}$ conjunto de arcos
$t(1) = a$, $h(1) = a$
$t(2) = a$, $h(2) = b$
$t(3) = b$, $h(3) = c$

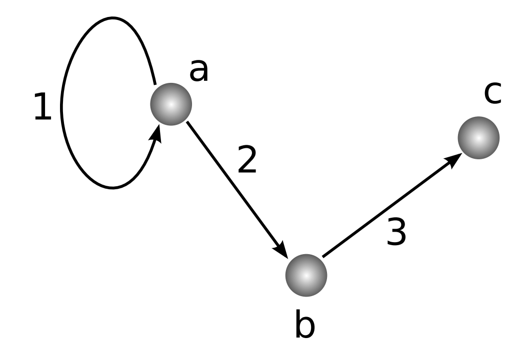


Figura 4.1: Ejemplo de Grafo

Definiciones varias.

- Se dice que un arco "e" es un bucle o loop si $t(e) = h(e)$.
- Si $e \neq f$, $t(e) = t(f)$ y $h(e) = h(f)$ decimos que e y f son arcos paralelos.
- Si existen arcos paralelos en un grafo decimos que éste es un multigrafo. En caso contrario se dice que el grafo es simple.
- Sea $G = (V, E)$. Si $\forall e \in E, \exists f \in E$ tq $t(f) = h(e)$ y $h(f) = t(e)$ entonces decimos que G es un grafo no dirigido. En caso contrario decimos que G es un grafo dirigido o digrafo.
- Si u y v son vértices, y uv es un arco, entonces decimos que u y v son vecinos o que ellos son adyacentes, o que el vértice u (o v) y el arco uv son incidentes.
- El número de arcos incidentes con un vértice se denomina grado.
- Un grafo para el cual se cumple que dados cualquier par de nodos existe un arco entre ellos, se denomina completo.

Notación: Si $G = (V, E)$ es un grafo, entonces $V(G)$ denotará V y $E(G)$ denotará E.

Definición 2. [Subgrafo] Decimos que H
es subgrafo de G si $V(H) \subset V(G)$, $E(H) = E(G)$ y $\forall e \in E(H)$, $t_H(e) = t_G(e)$ y $h_H(e) = h_G(e)$.

Un problema interesante que surge en la teoría de grafos es el que tiene que ver con la coloración de vértices, que consiste en asignarle colores a éstos, de manera que ningún par de vértices adyacentes (es decir, que exista un arco entre ellos) tengan el mismo color. También se puede definir un coloreamiento para los arcos de un grafo. En este caso se pide que ningún par de arcos con un vértice en común tengan el mismo color. A continuación presentaremos un teorema muy conocido que habla acerca del coloreamiento de nodos.

Teorema de los Cuatro Colores. *Cualquier mapa puede ser coloreado con cuatro colores diferentes, de manera que no queden regiones adyacentes (es decir, que tengan un segmento en común) con el mismo color*

Problema. *Demostrar que los vértices de cualquier grafo pueden ser coloreados usando los colores azul y rojo de modo que al menos la mitad de los vecinos de cualquier vértice de color azul son rojos y al menos la mitad de los vecinos de cualquier vértice de color rojo son azules.*

Solución: Sea $G = (V, E)$ un grafo arbitrario y C un coloreamiento. Denotemos $\Phi(C)$ el número arcos de G unidos a vértices del mismo color. Sea C_0 de modo que Φ es lo más pequeño posible. Afirmamos que para C_0 al menos la mitad de los vecinos de cualquier vértice de color azul son rojos y que al menos la mitad de los vecinos de cualquier vértice de color rojo son azules. Por contradicción, si no, podríamos encontrar un vértice con más de la mitad de sus vecinos del mismo color. Cambiando el color de este vértice obtenemos un valor más pequeño de Φ, lo que sería una contradicción.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Suponga que en una cierta ciudad cada par de personas pueden ser clasificadas como* `amigables` *u* `hostiles`*. Diremos que cada miembro de una pareja amigable es* `amigo` *del otro miembro de la pareja, y que cada miembro de una pareja hostil es* `enemigo` *del otro miembro de la pareja. Suponga que la ciudad consta de n personas y q parejas amigables, y que al menos un par, de cada tres personas, es hostil. Pruebe que existe al menos un miembro de la ciudad cuyos enemigos forman parte de $q(1 - \frac{4q}{n^2})$ o menos parejas amigables.*

Propuesto 2. *Pruebe que para todo $n \geq 5$, cualquier grafo con n vértices y $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2$ arcos contiene dos triángulos con exactamente un vértice en común.*

4.4. Principio de Invarianza

Es común encontrar en olimpíadas problemas en base a algoritmos (esto es, un estado inicial al que se le aplica una o varias transformaciones sucesivamente) en el que se pide responder (generalmente) si es posible alcanzar algún estado en particular.

Por ejemplo, un problema de este tipo es considerar el conjunto $\{1, 3, 4\}$ (estado inicial) en el que se puede escoger dos de los números, digamos a y b, y reemplazarlos por $0,6a - 0,8b$ y $0,8a + 0,6b$ (transformación). Una pregunta no trivial es si será posible obtener el conjunto $\{2, 3, 5\}$ (estado particular) después de varias operaciones.

Para cualquiera de estos problemas, si se quiere argumentar que si es posible alcanzar cierto estado particular, entonces se debe mostrar explícitamente cómo es que puede alcanzarse, lo que de ser posible, no debiese ser difícil de encontrar (por supuesto hay excepciones, sobre todo aquellas en las que para validar dicha existencia se debe razonar por contradicción, y que corresponden a problemas de extremalidad). Por

tanto, en la mayoría de estos problemas, el estado particular no es alcanzable y se debe argumentar el por qué, lo cual a priori resulta más difícil.

Una forma de hacerlo sería mostrar que hay alguna propiedad que se mantiene desde el estado inicial y que no cambia, no importa cuántas transformaciones se apliquen, pero que no es satisfecha por el estado particular al que se quiere llegar. Esto constituye la base del principio de invarianza: buscar aquello que no cambia.

En el ejemplo anterior, lo que nunca cambia es la suma de los cuadrados de los elementos del conjunto. Por ejemplo, si el conjunto es $\{a, b, c\}$, y reemplazamos a y b obteniendo $\{0,6a - 0,8b, 0,8a + 0,6b, c\}$, la nueva suma de cuadrados es $(0,6a - 0,8b)^2 + (0,8a + 0,6b)^2 + c^2 = 3,6a^2 - 9,6ab + 6,4b^2 + 6,4a^2 + 9,6ab + 3,6b^2 + c^2 = a2^{+}b^2 + c^2$, que es la misma que había antes de la transformación. Como en el problema el conjunto inicial es $\{1, 3, 4\}$, entonces todos los conjuntos que se pueden generar tendrán una suma de cuadrados igual a $1^2 + 3^2 + 4^2 = 26$. Como la suma de cuadrados del conjunto $\{2, 3, 5\}$ es $22 + 32 + 52 = 38 = 26$, entonces no es posible obtenerlo.

Como se observa, encontrar el invariante (la propiedad que no cambia) puede no ser sencillo. Por ello es que se requiere obtener experiencia resolviendo problemas de este tipo (para lo que se adjuntan los propuestos). Un manejo medio de este principio permite no sólo resolver problemas en los que hay transformaciones, sino también aquellos en los que se puede introducir transformaciones que no son propias del problema.

Por ejemplo, un problema de este tipo es determinar si es que es posible distribuir los signos + y − entre los números del 1 al 100, de forma que su suma final sea 2009. Para responder podemos mirar el problema desde otra perspectiva: consideramos la suma con todos los términos positivos (cuyo valor es 5050), y una transformación en la que cambiamos un signo + por uno −. La pregunta es ahora si mediante algunas transformaciones puede hacerse que la suma sea 2009. Notamos entonces que al cambiar un signo, el resultado de la suma mantiene una paridad invariante. En efecto, cambiar un signo + por uno − equivale en la suma a borrar el número y a restarlo, o lo que es lo mismo, restarlo dos veces al valor 5050. De esta forma, cambiar signos equivale a restar números pares. Como en un principio el valor era par (5050), sólo se pueden generar valores pares. Como 2009 es impar, no es posible obtenerlo.

En este último ejemplo, introducir una transformación no es la única forma de resolver el problema, pero permite obtener una solución sencilla. De igual forma, hay varios problemas en los que conviene buscar soluciones mediante esta vía, y que se incluyen en los propuestos.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *Se escriben los números* $1, 2, 3, \ldots, 98$ *en un pizarrón. Luego se escogen dos números cualquiera, digamos* a *y* b*, con* $a > b$*, se borran, y se escribe el número* $a - b$*. Este paso se repite sucesivamente, de forma que al final queda un sólo número en el pizarrón. Pruebe que este último número es siempre impar.*

Propuesto 2. *En la isla de Camelot viven* 13 *camaleones rojos,* 15 *verdes y* 17 *amarillos. Cuando dos camaleones de distinto color se encuentran, cambian simultáneamente al tercer color. ¿Podría darse la situación en que todos los camaleones de la isla tengan el mismo color?*

Propuesto 3. *Un cuarto inicialmente está vacío. Cada minuto entra una persona o salen dos del cuarto. Después de exactamente* 3^{2009} *minutos, ¿puede contener el cuarto* $3^{1000} + 2$ *personas?*

Propuesto 4. *Se tienen* 2001 *semáforos acomodados sobre una circunferencia. Un movimiento consiste en seleccionar tres semáforos consecutivos y avanzar cada uno de ellos una posición (es decir, un semáforo en siga se pone en preventivo, uno en preventivo se pone en alto y uno en alto se pone en siga). Inicialmente hay* 1000 *semáforos en siga y* 1001 *en alto. ¿Es posible poner todos los semáforos en preventivo mediante una sucesión de movimientos?*

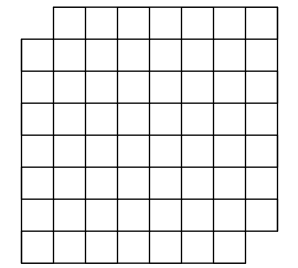
Propuesto 5. *Drini participa en un juego de mesa en el que en cada turno tiene que pagar* \$100 *y tirar un dado. Si cae* 1 *ó* 2*, gana* \$400*; si cae* 3 *paga otros* \$200*; si cae* 4 *le devuelven sus* \$100*; y si cae* 5 *ó* 6 *gana* \$1000*. Si inicialmente tiene* \$2000*, ¿es posible que en algún momento llegue a tener* \$12000 *exactamente?*

4.5. Argumentos por Coloración

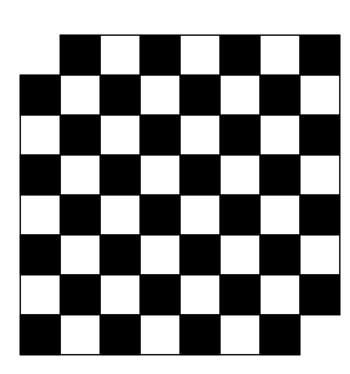
Los problemas de esta sección tratan en general de conjuntos de varios elementos y de su división en subconjuntos. La gracia de esta división es que se hace coloreando a todos los elementos de un subconjunto con el mismo color. De esta forma, si se hace convenientemente, pueden resolverse fácilmente problemas que a primera vista parecen bastante complejos.

A manera de ejemplificar, consideremos un problema clásico.

Problema. *Tenemos un tablero de* 8×8*, al que se le han quitado dos esquinas diagonalmente opuestas. ¿Puede llenarse utilizando piezas de dominó (piezas de* 2×1*), sin superponerlas?*



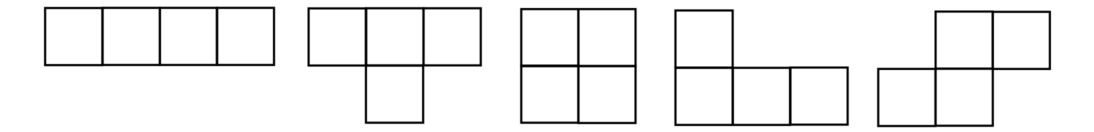
La respuesta es que no y el argumento es simple. Si se pinta el tablero como si fuera de ajedrez, entonces pueden contarse 30 cuadraditos de un color y 32 de otro (pues las dos esquinas opuestas diagonalmente que se sacaron deberían tener el mismo color). Como una ficha de dominó cubre un cuadrado blanco y otro negro, entonces si pudiera llenarse el tablero con éstas, cubrirían exactamente 31 cuadrados blancos y 31 negros, lo cual no es posible por la cantidad de colores que ya se mencionó hay en el tablero.



El problema anterior, así como muchos otros, solamente requería dos colores; sin embargo, hay problemas que podrían requerir más de dos (aunque no están incluídos en los propuestos). Para poder desarrollar las habilidades que permitan identificar cuándo es posible usar coloraciones es que conviene tratar de desarrollar cada uno de los problemas a continuación.

Problemas Propuestos

Propuesto 1. *¿Es posible formar un rectángulo con las cinco figuras de abajo?*



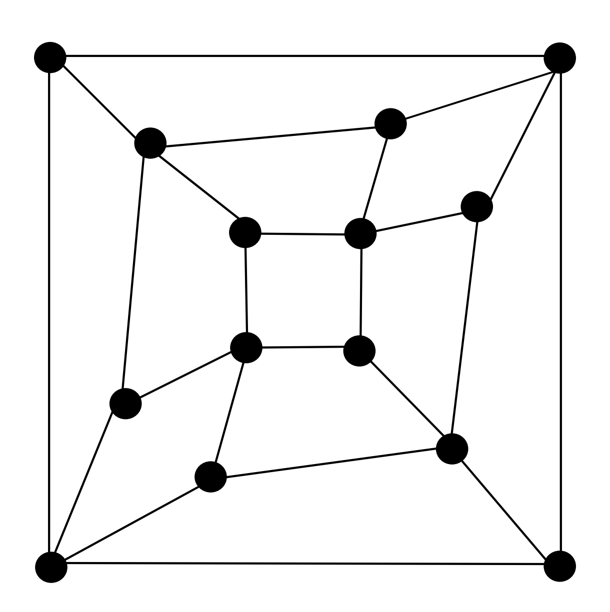
Propuesto 2. *Pruebe que un tablero de* 10×10 *no puede ser cubierto con* 25 *figuras con forma de* $\boldsymbol{T}$ *(la segunda figura de izquierda a derecha en las cinco anteriores)*

Propuesto 3. *Pruebe que un tablero de* 8×8 *no puede ser cubierto por* 15 *figuras con forma de* $\boldsymbol{T}$ *y una figura de* 2×2.

Propuesto 4. *Un piso rectangular (no importa el tamaño) es cubierto completamente con baldosas de 2×2 y 1×4. Una de las baldosas se quiebra, pero queda una del otro tipo que había sobrado. Pruebe que no es posible volver a cubrir el piso reordenando las baldosas y ocupando la que sobró.*

Propuesto 5. *En cada uno de los cuadraditos de un tablero de 9×9 se posa un escarabajo. A cierta señal, cada escarabajo se mueve diagonalmente a un cuadradito vecino. Entonces podría pasar que hayan cuadraditos con varios escarabajos, y otros vacíos Encuentra el menor número de cuadraditos que pueden quedar vacíos.*

Propuesto 6. *En la siguiente figura se muestra un mapa de caminos conectando 14 ciudades. ¿Hay alguna ruta que pase por cada ciudad exactamente una vez?*



Apéndice A

Torneo El Número de Oro 2008

A.1. Nivel Menor

A.1.1. Primera Fecha

P1. Se tienen tres máquinas transformadoras de números. Nosotros ingresamos el par (a_1, a_2), y la máquina devuelve (b_1, b_2). Esta transformación la denotamos por $(a_1, a_2) \to (b_1, b_2)$.

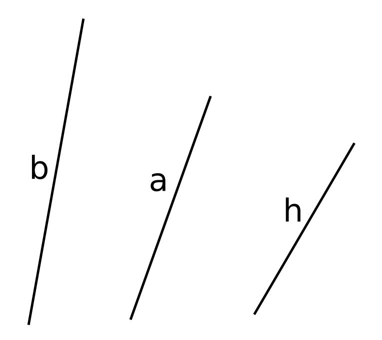
a) La primera puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \to (a-1, b-1)$ o $(a, b) \to (a+13, b+5)$. Si el primer par ingresado es $(5, 2)$, ¿es posible tras una serie de transformaciones obtener el par $(20, 22)$?

b) La segunda puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \to (a-1, b-1)$ o $(a, b) \to (2a, 2b)$. Si el primer par ingresado es $(15, 10)$, ¿es posible tras una serie de tranformaciones obtener el par $(27, 23)$?

c) La tercera puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \to (a-2, b+2)$ o $(a, b) \to (2a-b+1, 2b-1-a)$. Si el primer par ingresado es $(5, 8)$, ¿es posible tras una serie de transformaciones obtener el par $(13, 17)$?

P2. Se tiene un cubo de $4 \times 4 \times 4$, de modo que dividimos cada cara de él en 16 cuadraditos iguales. Los números del 1 al 96 están escritos aleatoriamente en estos cuadraditos. Una operación consiste en tomar dos cuadraditos que tengan un vértice en común, encontrar la suma de los números escritos en ellos, y reescribir ésta en alguno de los dos cuadraditos, dejando el otro en blanco. Se realizan varias operaciones de forma que queda sólo un número. Pruebe que no importa el orden en que se hayan realizado las operaciones, el número que queda al final siempre es el mismo. Además, encuentre dicho número.

P3. Los amigos de Luis quisieron jugarle una broma, y en su tarea de geometría borraron la totalidad de un triángulo, pero dejaron dibujados trazos equivalentes a dos lados que miden a y b, con $b > a$, y la altura de medida h que caa sobre el lado de medida b, con $h < a$. Ayude a Luis a poder entregar su tarea explicando cómo se puede dibujar nuevamente el triángulo, a partir de las medidas dejadas, utilizando sólo regla y compás. Para colmo la regla de Luis no tiene medidas, pero es más larga que los lados y la altura.



Soluciones

P1.

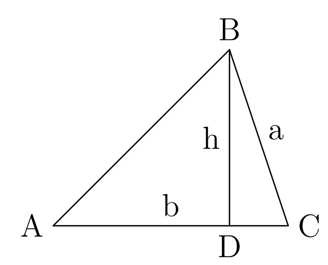
a) La diferencia entre ambas componentes es $a - b$ y $a - b + 8$, es decir, ésta nunca es menor a $a - b$, y por lo tanto no decrece. Como la diferencia inicial era $5 - 2 = 3$ y $20 - 22 = -2 < 3$,entonces no se puede llegar a $(20, 22)$.

b) La diferencia entre ambas componentes es $a - b$ y $2(a - b)$, es decir, la diferencia en ningún caso decrece. Como la diferencia inicial era $15 - 10 = 5$ y $27 - 23 = 4 < 5$, entonces el par $(27, 23)$ es imposible de obtener.

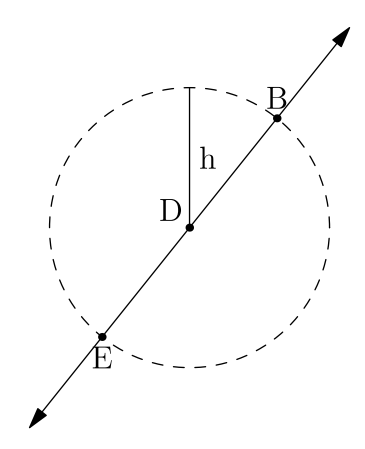
c) Notemos que en ambas transformaciones, la suma de los números entregados se mantiene invariante en el tiempo, pues $a-2+b+2 = a+b$, y $2a-b+1+2b-1-a = a + b$. Inicialmente tenemos que la suma de los números entregados a la máquina es $5 + 8 = 13$, pero $13 + 17 = 30 \neq 13$, luego no es posible.

P2. Notemos que no imptorta el orden en que se elijan los números, porque la suma es conmutativa y porque se al final se toman todos los números. Por lo tanto, el número final es único y corresponde a la suma de todos los números del cubo, o sea $1 + 2 + 3 + \ldots + 95 + 96 = \frac{96 \cdot 97}{2} = 4656$.

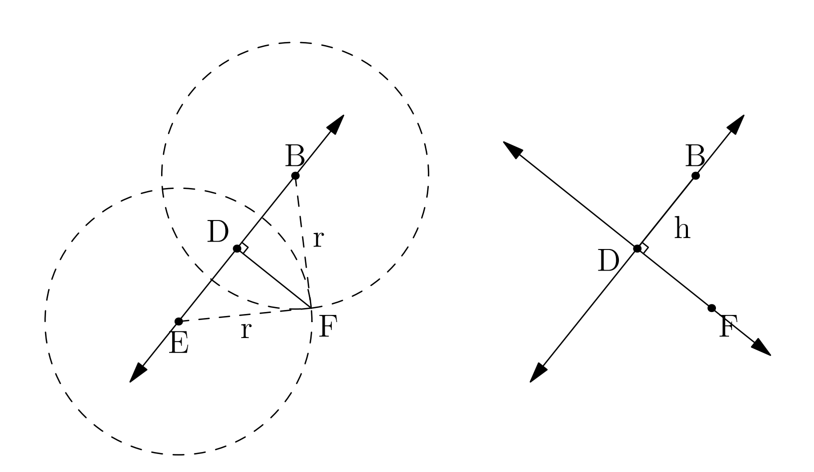
P3. Se quiere dibujar un triángulo con dos lados (a y b, con $a < b$) y una altura (h, que cae sobre b, con $a > h$), como muestra la figura:



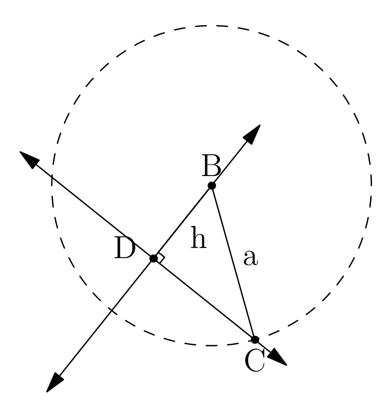
Primero se traza una recta con la regla, y con centro sobre ella (en un punto D) se dibuja una circunferencia de radio h con el compás, que la intersecta en dos puntos, B y E.



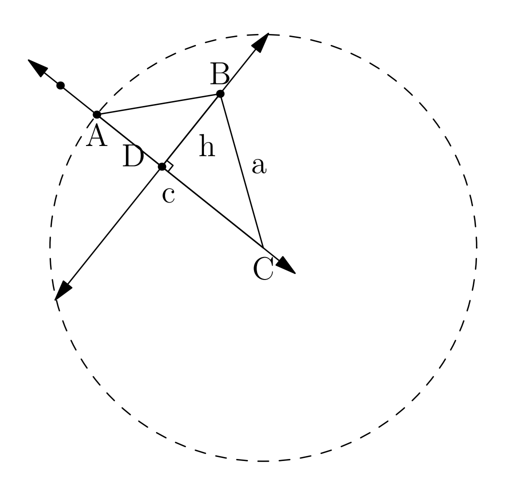
Con centro en B y con centro en E se trazan dos circunferencias del mismo radio r, con $r > h$, de tal forma que se intersecten en dos puntos. Se elige uno y se le llama F. Como $BF = EF = r$ entonces el $\triangle BFE$ es issceles de base BE. Como D es punto medio de BE, entonces FD es altura en el $\triangle BFE$, y por tanto las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{DF}$ son perpendiculares.



Con centro en B y radio a se traza un circunferencia que intersecta a $\overleftrightarrow{FD}$ en dos puntos (pues $a > h$). Se elige uno y se le llama C; entonces $BC = a$.



Con centro en C y radio b se traza una circunferencia que intersecta a $\overleftrightarrow{CD}$ en dos puntos. Se elige uno de ellos y se le llama A; entonces $AC = b$. Finalmente se traza AB, obteniéndose el triángulo pedido.



Observación: Si se hubiesen elegido otros puntos en el proceso, se habrán obtenido otros triángulos que igualmente satisfacen lo pedido.

A.1.2. Segunda Fecha

P1. Un pastel cuadrado de altura uniforme se recubre uniformemente de crema, tanto encima como por los cuatro lados. Hallar una forma de cortar el pastel en cinco porciones tales que:

a) Todos tengan la misma cantidad de pastel.

b) Todos tengan la misma cantidad tanto de pastel como de crema.

P2. *Eliminado.*

P3.

a) Sea $2 + 4 + 6 + \ldots + p = 6480$. Encuentre p.

(Puede asumir que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ en toda la pregunta).

b) Sea $7 + 11 + 15 + \ldots + q = 5250$. Encuentre q.

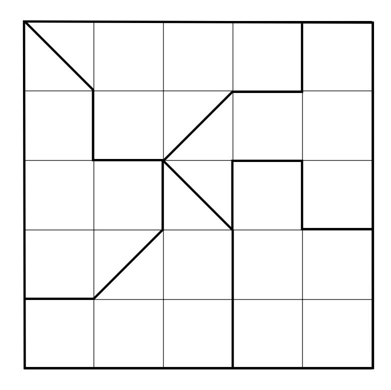
(Note que todos los términos son de la forma $4k + 3$).

c) Sea $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + r^2 - 1^2 - 3^3 - 5^2 - \ldots - (r-1)^2 = 2485$. Calcule r.

(Note que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$).

Soluciones

P1. Notemos que basta resolver la parte **b)**, pues también cumple la condición de la parte **a)**.



En la figura, se observa la parte superior del pastel que fue dividida en 25 cuadraditos. Las líneas más marcadas representan como se hacen los cortes. Es evidente entonces que cada pedazo tiene la misma cantidad de pastel y de crema.

P3.

a) Notemos que por la sucesión p debe ser par, esto es, p es de la forma $p = 2s$ para algún s número natural. Luego $2 + 4 + 6 + \ldots + p = 2 + 4 + \ldots + 2s = 6480$ y se puede proceder de cualquiera de las siguientes dos formas:

1) Se sabe que $1 + 2 + 3 + \ldots + s = \frac{s(s+1)}{2}$. Si se multiplica por 2 ambos lados de la igualdad se obtiene $2+4+6+\ldots+2s = s(s+1)$, por lo que el problema se reduce a resolver $s(s+1) = 6480$. Como $6480 = 80 \cdot 81$, entonces la única solución positiva es $s = 80$ (si $s > 80$ entonces $s(s+1) > 80 \cdot 81$, y si $s < 80$ entonces $s(s+1) < 80 \cdot 81$). Luego $p = 2s = 2 \cdot 80 = 160$.

2) Todos los términos son pares (múltiplos de 2), así que $2 + 4 + 6 + \ldots + 2s = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot s = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + s) = 2 \cdot \frac{s(s+1)}{2} = s(s+1) = 6480$, de donde sigue que $s = 80$ y $p = 160$.

b) Todos los números son de la forma $4k + 3$, así que escribiendo $q = 4t + 3$ la suma queda $7 + 11 + 15 + \ldots + q = (4 \cdot 1 + 3) + (4 \cdot 2 + 3) + (4 \cdot 3 + 3) + \ldots + (4 \cdot t + 3)$.

Notemos que hay t términos (pues dependiendo de t van desde el $(4 \cdot 1 + 3)$ hasta el $(4 \cdot t + 3)$) por lo que los $(+3)$ aparecen t veces.

Entonces $(4 \cdot 1 + 3) + (4 \cdot 2 + 3) + (4 \cdot 3 + 3) + \ldots + (4 \cdot t + 3)$

$= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \ldots + 4 \cdot t + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{t \text{ veces}}$

$= 4(1 + 2 + 3 + \ldots + t) + 3t$

$= 4 \cdot \frac{t(t+1)}{2} + 3t$

$= 2t(t + 1) + 3t$

$= 2t^2 + 2t + 3t$

$= 2t^2 + 5t$

$= t(2t + 5).$

Luego el problema se reduce a resolver $t(2t + 5) = 5250$. Como $5250 = 50 \cdot 105 = 50 \cdot (2 \cdot 50 + 5)$, entonces la única solución positiva es $t = 50$. Luego $q = 4t + 3 = 4 \cdot 50 + 3 = 203$.

c) Lo que se hará será reordenar la suma de forma de juntar términos consecutivos para que en la igualdad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ el término $(a - b)$ siempre sea igual a 1, facilitando los cálculos.

Entonces

$2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + r^2 - 1^2 - 3^2 - 5^2 - \ldots - (r - 1)^2$
$= 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + 6^2 - 5^2 \ldots + r^2 - (r - 1)^2$
$= (2 + 1)(2 - 1) + (4 + 3)(4 - 3) + (6 + 5)(6 - 5) + \ldots + (r + (r - 1))(r - (r - 1))$
$= (2 + 1)(1) + (4 + 3)(1) + (6 + 5)(1) + \ldots + (r + (r - 1))(1)$
$= (2 + 1) + (3 + 4) + (6 + 5) + \ldots (r + (r - 1))$
$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + (r - 1) + r$
$= \frac{r(r+1)}{2}$

Luego el problema se reduce a resolver $\frac{r(r+1)}{2} = 2485$. Si se multiplica por 2 a ambos lados de la igualdad se obtiene $r(r + 1) = 4970$. Como $4970 = 70 \cdot 71$, entonces la única solución positiva es $r = 70$.

A.1.3. Tercera Fecha

Problemas

P1. Se tiene una cuadrícula de 5×5 que llamaremos f_1:

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Se construye la cuadrícula f_{n+1} en que cada casilla es igual al producto de las casillas vecinas en la cuadrícula f_n.

a) Encuentre las cuadrículas f_6 y f_7.

b) Encuentre las cuadrículas f_{2008} y f_{2009}.

c) Encuentre f_{2n} y f_{2n+1} para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Nota: Se consideran casillas vecinas a las que comparten un lado, no un vértice.

P2. En un accidente de tránsito se han visto involucrados tres autos: uno azul, uno verde y uno rojo. Tres personas hablaron con la policía y dieron los siguientes testimonios sobre el accidente:

Persona 1: El auto rojo no tuvo culpa, el verde y el azul tuvieron.

Persona 2: O el auto verde tuvo culpa, o el rojo tuvo, pero no ambos.

Persona 3: Sólo uno de los autos tuvo culpa, pero no fue el azul.

La policía sabe que al menos un auto tuvo culpa, y que al menos uno no tuvo. Lo que la policía no sabe es que las tres personas mintieron.

¿Cuál o cuáles autos fueron los culpables del accidente?.

P3.

a) ¿Es posible formar un número primo utilizando todas las cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 una sola vez cada una?

b) Considere el siguiente cuadrado de la figura en el que cada fila, columna y diagonal suma lo mismo (en este caso 15).

6	7	2
1	5	9
8	3	4

¿Es posible formar un cuadrado con las mismas características utilizando los números $11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ y 19?

Soluciones

P1. Notemos que basta resolver la parte **c)**, pues de ahí se pueden responder las partes **a)** y **b)**. Construyamos las primeras cuadrículas:

1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
f_2				

-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
f_3				

1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1
f_4				

Por el enunciado tenemos que la configuración de cada cuadrícula depende exclusivamente de la anterior. Por tanto, como la cuadrícula f_3 depende de la f_2 y la f_5 depende de la f_4, y además las cuadrículas f_2 y f_4 son iguales, se puede concluir que las cuadrículas f_3 y f_5 son iguales (sin necesidad de construir f_5). Por el mismo argumento se concluye que todas las cuadrículas de la forma f_{2n} serán iguales a f_2, y todas las de la forma f_{2n+1} serán iguales a f_3 (para cualquier $n \in \mathbb{N}$).

P2. La respuesta es que hay dos posibilidades, o sólo el azul tuvo la culpa, o ambos, el rojo y el verde la tuvieron. En efecto cualquiera de las dos se contradice con los tres tesmimonios (lo que debe ser así pues los tesminonios son falsos). Resta por tanto descartar las posibilidades restantes. Éstas son sólo dos (recordando que al menos uno tuvo culpa y que no todos la tuvieron):

· Que sólo un auto haya tenido culpa, y que sea el rojo o el verde. Esto no puede ser, pues significara que la persona 2 y la persona 3 dijeron la verdad.

· Que el auto azul haya tenido culpa junto con otro de los autos. Esto no puede ser, pues significará que la persona 2 dijo la verdad.

P3. a) La respuesta es no. La suma de todos las cifras es 45, que es divisible por 3. Luego, de acuerdo al criterio de divisivilidad de este número, cualquier número que se forme con ellas también será divisible por 3, y por tanto, compuesto (no primo).

b) La respuesta es sí. Basta sumar 10 a cada nḿero obteniéndose el siguiente cuadrado que cumple con lo pedido:

16	17	12
11	15	19
18	13	14

A.1.4. Cuarta Fecha (Recuperativa)

P1. Un artesano hace collares con ocho piedras redondas, cuatro de esmeralda (verdes) y cuatro de rubí (rojas), dispuestas a la misma distancia una de otra. Un día decide regalar collares entre sus amigas. ¿Cuántos collares podrá regalar sin correr el riesgo de que dos amigas se encuentren con el mismo collar puesto en el cuello? (*Observación:* Note que el collar es totalmente simétrico excepto por el tipo de piedra, así que no hay una única forma de usarlo. Piense bien en esto.)

P2.

a) Considere un tablero de 6×6 al cual se le han quitado dos cuadraditos en las esquinas diagonalmente opuestas. Pruebe que no es posible cubrirlo exactamente con fichas de 2×1. (*Indicación:* Coloree el tablero como si fuera de ajedrez y concluya).

b) Considere una caja de dimensiones $4 \times 4 \times 4$ a la cual en una cara cualquiera se le han quitado dos cubos de $1 \times 1 \times 1$ en las esquinas diagonalmente opuestas. ¿Será posible llenarla exactamente con ladrillos de dimensiones $2 \times 1 \times 1$?.

P3. a) Muestre que existen infinitos n (número natural) que cumplen que la suma de las cifras de $11n$ es el doble de la suma de las cifras de n. (*Indicación:* Quizás le sea de ayuda buscar con valores pequeños de n primero).

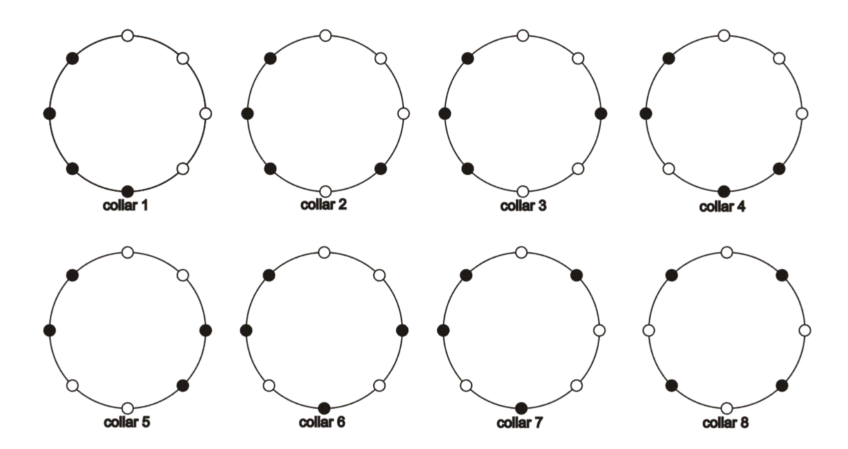
b) Muestre que existen infinitos n (número natural) que cumplen que la suma de las cifras de $5n + 1$ es igual a seis veces la suma de las cifras de n. (*Indicación:* Quizás le sea de ayuda notar que las cifras 0 no influyen en la suma de cifras).

Soluciones

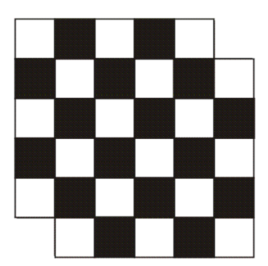
P1. Notemos que el collar puede girarse en el cuello de una persona o puede usarse al revés (sacarlo, darlo vuelta y volver a ponérselo), lo cual hace que una sola configuración de las piedras deriva en varias formas de uso; y por tanto es fácil contar caso a caso.

· Si las cuatro verdes (negras en la figura) son vecinas tenemos un caso (collar 1).
· Si hay tres verdes vecinas, entonces hay tres formas de poner la que está sola, pero en éstas hay dos que son el mismo collar al revés, así que se tienen dos casos (collares 2 y 3).
· Si las verdes están de a pares, entonces hay tres formas de ponerlas, pero en éstas hay dos que son el mismo collar al revés; así que se tienen dos casos (collares 4 y 5).
· Si sólo hay un par de verdes juntas, entonces hay tres formas de ponerlas, pero en éstas hay dos que son el mismo collar al revés, así que se tienen dos casos (collares 6 y 7).
· Si ninguna verde está junto a otra, entonces se tiene un sólo caso (collar 8).

Todos las demás combinaciones derivan de girar el collar. Por tanto el total de collares distintos es 8.



P2. a) Al pintarlo como en la figura se puede apreciar que quedan 16 cuadraditos negros y 18 blancos. Como una ficha de 2×1 ocupa necesariamente un cuadradito negro y uno blanco, no hay forma de cubrir los cuadraditos blancos que sobrarán cuando se ocupen todos los negros.



b) Se pinta cada cubo de $1 \times 1 \times 1$ de color negro o blanco, de forma que todos los otros cubos con los que comparta una cara sea del color opuesto. Se puede apreciar entonces que quedan más cubos negros o más blancos (depende de la coloración), pues los dos cubos que se sacaron, al ser diagonalmente opuestos, son del mismo color. Finalmente, se concluye como en la parte anterior.

P3. a) Buscando n pequeño es fácil darse cuenta que todos los números de la forma $n = a0a0a0\dots a0a0a0$ satisfacen lo pedido pues $11n = aaaaaa\dots aaaaaa$, en donde se aprecia que cada cifra 0 se cambia por a, por lo que la suma total de las cifras de $11n$ es el doble de las de n.

b) Buscando n pequeño es fácil notar que todos los números de la forma $n = 1000\dots000$ satisfacen lo pedido pues $5n+1 = 5000\dots001$, en donde se aprecia que en el primer caso las cifras siempre suman 1 y en el segundo siempre suman 6.

A.2. Nivel Mayor

A.2.1. Primera Fecha

P1. Se tienen tres máquinas transformadoras de números. Nosotros ingresamos el par (a_1, a_2), y la máquina devuelve (b_1, b_2). Esta transformación la denotamos por $(a_1, a_2) \rightarrow (b_1, b_2)$.

a) La primera puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \rightarrow (a-1, b-1)$ o $(a, b) \rightarrow (a+13, b+5)$. Si el primer par ingresado es $(25, 32)$, ¿es posible tras una serie de transformaciones obtener el par $(82, 98)$?

b) La segunda puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \rightarrow (a-1, b-1)$ o $(a, b) \rightarrow (2a, 2b)$. Si el primer par ingresado es $(34, 60)$, ¿es posible tras una serie de tranformaciones obtener el par $(2000, 2008)$?

c) La tercera puede realizar dos transformaciones, $(a, b) \rightarrow (a-2, b+2)$ o $(a, b) \rightarrow (2a-b+1, 2b-1-a)$. Si el primer par ingresado es $(145, 220)$, ¿es posible tras una serie de transformaciones obtener el par $(363, 498)$?

P2. Se define por recurrencia la sucesión a_n, $n \in \mathbb{N}$, de forma que:

$$a_0 = 6,\ a_1 = 7,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$$

Encuentre todos los valores de n para los cuales $n^2 = a_n$.

P3. Los amigos de Luis quisieron jugarle una broma, y en su tarea de geometría borraron la mayor parte de un triángulo, dejando dos ángulos y dibujándole un trazo equivalente a la suma de los 3 lados del triángulo. Ayude a Luis a poder entregar su tarea explicando cómo se puede dibujar nuevamente el triángulo, a partir de las medidas dejadas, utilizando sólo regla y compás. Para colmo la regla de Luis no tiene medidas, aunque es más larga que la suma de los 3 lados.

Soluciones

P1.

a) Notemos que en las transformaciones la suma de los números entregados equivale a $a+b-2$ y $a+b+18$, es decir, se mantiene la paridad de la suma de los números ingresados inicialmente, pues siempre aumenta (o disminuye) en un número par. Luego, como la suma inicial era $25+32=57$, cualquier suma de números obtenidos posteriormente debe ser impar. Pero $82+98=180$ es par, luego no es posible.

b) La diferencia entre ambas componentes es $|a-b|$ y $2|(a-b)|$, es decir, la diferencia en ningún caso decrece. Como diferencia inicial era $|34-60|=26$ y $|2000-2008| = 8 < 26$, entonces no es posible.

c) Notemos que en ambas transformaciones, la suma de los números entregados se mantiene invariante en el tiempo, pues $a-2+b+2=a+b$, y $2a-b+1+2b-1-a = a+b$. Inicialmente tenemos que la suma de los números entregados a la máquina es $145+220=365$. Como $363+498=861 \neq 365$, entonces no es posible.

P2. Primero determinaremos el término general para la sucesión. Notemos que $a_0 = 6 = 2^0+5$ y $a_1 = 7 = 2^1+5$. Probaremos por inducción que $a_n = 2^n+5$, $n \in \mathbb{N}$. Supongamos entonces que la igualdad es cierta para un n fijo y para su antecesor $(n-1)$, luego:

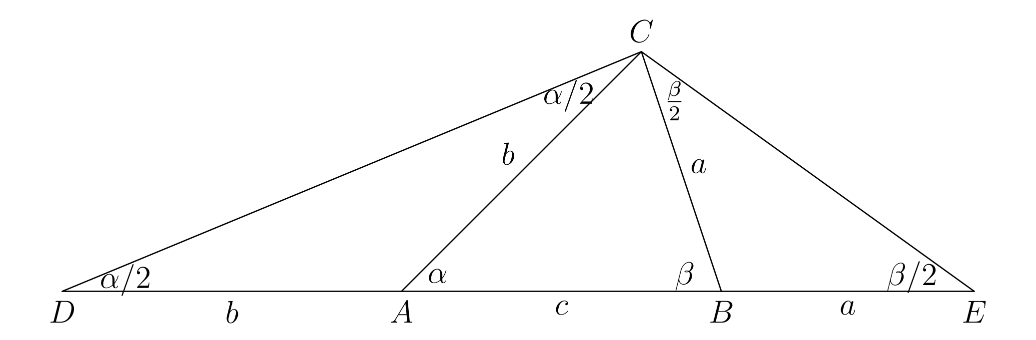
$a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} = 3(2^n+5) - 2(2^{n-1}+5) = 3\cdot 2^n - 2\cdot 2^{n-1} + 10 - 5 = 3\cdot 2^n - 2\cdot 2^{n-1} + 10 - 5 = 2\cdot 2^n + 5 = 2^{n+1}+5$

por lo que también vale para $n+1$, completando la inducción.

Ahora debemos encontrar los valores de n para los cuales $a_n = 2^n+5 = n^2$. Pero los cuadrados dejan resto $0, 1$ 4 al ser divididos por 8, mientras que 2^n+5 deja resto 5 para $n \geq 3$, por lo que no hay solución en esos casos. Por inspección, tampoco hay solución en los casos $n < 2$. Por tanto, no hay ningún valor de n que cumpla la igualdad.

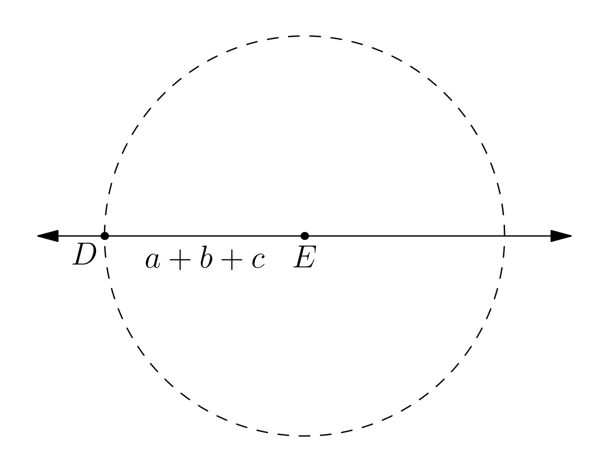
P3. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que los ángulos que se tienen son α y β, correspondientes a los vértices A y B de un $\triangle ABC$.

Se quiere dibujar entonces un triángulo con lados a, b y c, a partir de un trazo de medida $a+b+c$ y los ángulos α y β.

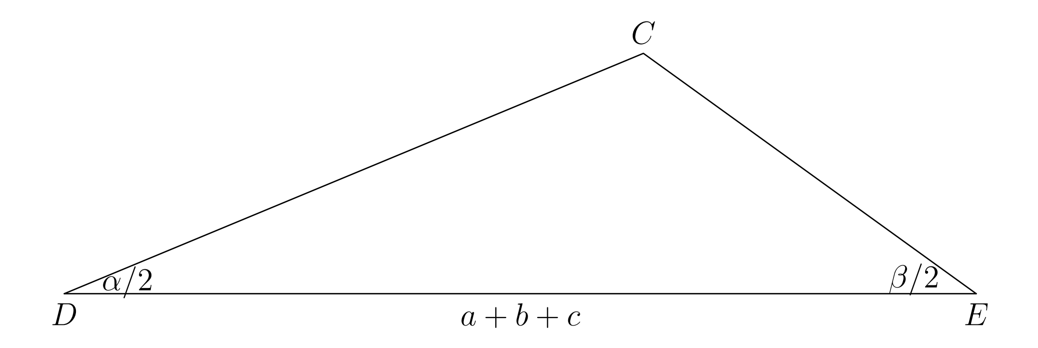


Nótemos que si se extiende $\overrightarrow{BA}$ hacia un punto D tal que $DA = AC = b$, entonces se forma el $\triangle DAC$ que es isósceles de base DC. Como $\angle CDA + \angle DCA = \angle CAB = \alpha$ y $\angle CDA = \angle DCA$, entonces $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$.
Análogamente si se extiende $\overrightarrow{AB}$ hacia un punto E tal que $BE = BC = a$ se tiene que $\angle BCE = \angle CEB = \frac{\beta}{2}$.
Notemos que también $DE = DA + AB + BE = b + c + a$.

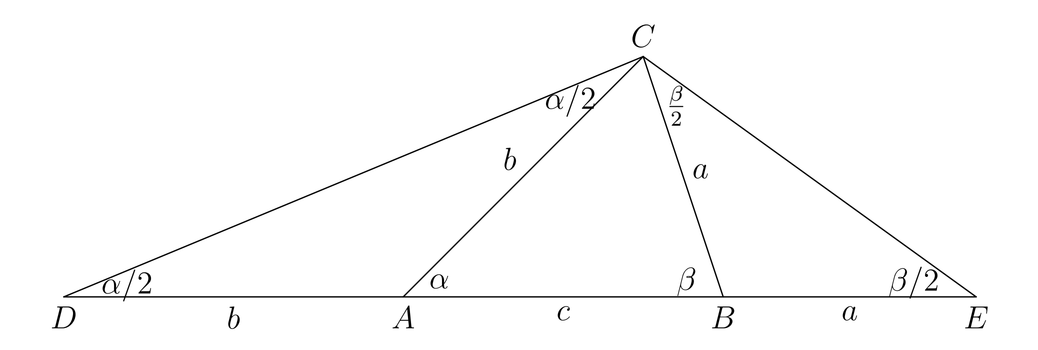
Para dibujar el triángulo, primero trazamos una recta con la regla y con centro sobre ella (en un punto E) se dibuja una circunferencia de radio $a + b + c$ con el compás, que la intersecta en dos puntos. Se elige uno y se le llama D, entonces $DE = a+b+c$.



Se dimidian los ángulos α y β (1).
Luego se copian los ángulos $\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\beta}{2}$ con vértices en D y E, con rayos $\overrightarrow{DE}$ y $\overrightarrow{ED}$ respectivamente, del mismo lado del semiplano (2). La intersección de los otros rayos se denota C.



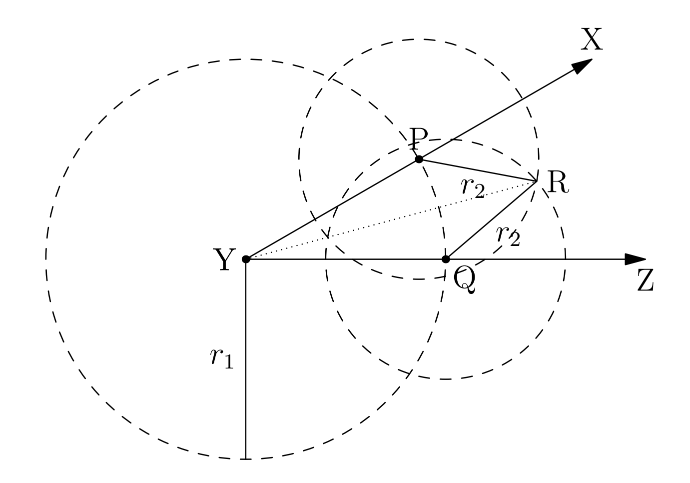
Se copian los ángulos $\frac{\alpha}{2}$ y $\frac{\beta}{2}$ ambos con vértice en C, con rayos $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CE}$ respectivamente, en el interior del $\triangle DCE$. Sus otros rayos intersectan a $\overline{DE}$ en puntos que se denotarán A y B respectivamente. Por el análisis del principio se concluye que el $\triangle ABC$ es el deseado.



Observación: Si se hubiesen elegido otros puntos en el proceso, se habrán obtenido otros triángulos que igualmente satisfacen lo pedido.

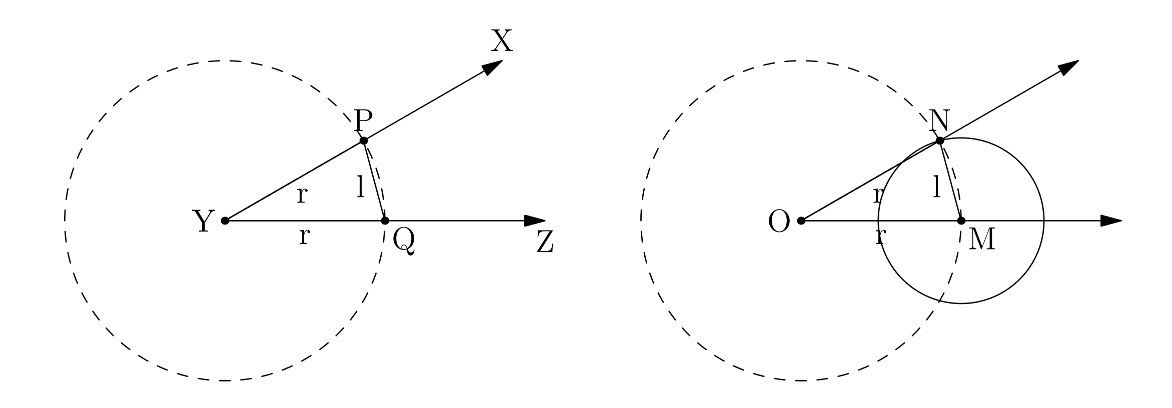
Nota (1): Para dimidiar un ángulo se procede como sigue:

Sea $\angle XYZ$, se dibuja una circunferencia con centro en Y y radio r_1 arbitrario de forma que intersecte a $\overrightarrow{YX}$ y a $\overrightarrow{YZ}$ en P y Q respectivamente. Con centro en P y centro en Q se dibujan dos circunferencias del mismo radio r_2 elegido de forma que se intersecten en dos puntos. Se elige uno y se le llama R. Notemos que $\triangle YPR \cong \triangle YQR$ por criterio LLL ($YP = YQ = r_1$, $PR = QR = R_2$ y RY lado común). Luego $\angle PYR = \angle QYR = \frac{\angle XYZ}{2}$.



Nota (2): Para copiar un ángulo se procede como sigue:

Sea $\angle XYZ$, se dibuja una circunferencia con centro en Y y radio r arbitrario de forma que intersecte a $\overrightarrow{YX}$ y a $\overrightarrow{YZ}$ en P y Q respectivamente. Sobre la recta en que se quiere copiar y con centro en el que se quiere sea el vértice (punto O) se dibuja una circunferencia de radio r que la intersecta en dos puntos. Dependiendo del sentido que se quiera se elige uno de ellos y se le llama M. Con centro en M se dibuja una circunferencia de radio PQ que intersecta a la otra en dos puntos. Dependiendo del sentido que se quiera se elige uno y se le llama N. Notemos que $\triangle PYR \cong \triangle MON$ por criterio LLL ($YP = OM = YQ = ON = r$ y $PQ = MN$). Luego $\angle XYZ = \angle MON$.



A.2.2. Segunda Fecha

P1. Demostrar que las diagonales de un cuadrilátero convexo son perpendiculares entre sí, si y sólo si, la suma de los cuadrados de un par de lados opuestos es igual a la del otro par.

P2. Se tiene el polinomio a coeficientes reales

$$p(x) = a_{2008}x^{2008} + a_{2007}x^{2007} + \ldots + a_1x + a_0$$

y se sabe que sus coeficientes satisfacen

$$a_i + a_{i+1} = a_{i+2} \ , \quad i \in \{0, 1, 2...., 2006\}$$

Si $p(1) = 2008$ y $p(-1) = 0$, calcule $a_{2008} - a_0$.

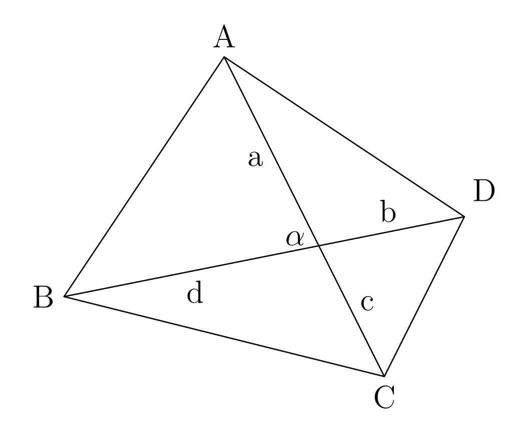
P3. Si un cuadrado es dibujado externamente sobre cada lado de un paralelógramo, pruebe que:

a) El cuadrilátero determinado por los centros de esos cuadrados es un cuadrado.

b) Las diagonales del nuevo cuadrado formado son concurrentes con las diagonales del paralelógramo original.

Soluciones

P1.



Hay que probar dos afirmaciones:

(i) Diagonales perpendiculares $\Rightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Si las diagonales son perpendiculares, entonces aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene

$$AB^2 + CD^2 = (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2) = (a^2 + c^2) + (b^2 + d^2) = AD^2 + BC^2$$

lo que prueba la primera afirmación.

(ii) $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Rightarrow$ Diagonales perpendiculares

Sea $\alpha = \angle AEB$. Por Teorema del Coseno tenemos que:

$$AB^2 + CD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot cos(\alpha) + b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) \ (1)$$

$$AD^2 + BC^2 = a^2 + c^2 - 2ca \cdot cos(180 - \alpha) + b^2 + d^2 - 2bd \cdot cos(180 - \alpha) \ (2)$$

Recordando que $cos(180 - \alpha) = -cos(\alpha)$, igualando (1) y (2), y luego agrupando términos semejantes se obtiene

$$(ad + bc + ac + bd) \cdot cos(\alpha) = 0$$

Dado que $a, b, c, d > 0$, entonces $cos(\alpha) = 0$; y luego como $0 < \alpha < 180$, se tiene que $\alpha = 90$, lo que prueba la segunda afirmación.

P2. Sabemos por enunciado que:

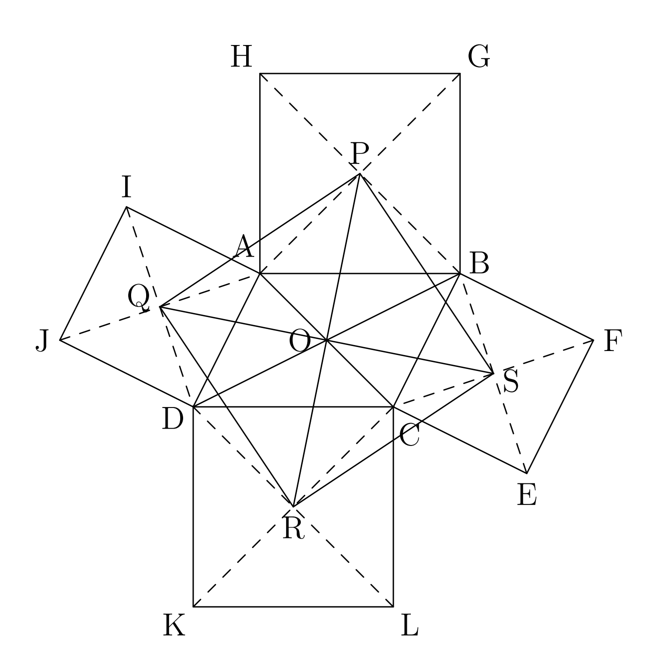
$p(1) = a_{2008} + a_{2007} + \ldots + a_1 + a_0 = 2008$
$p(-1) = a_{2008} - a_{2007} + \ldots - a_1 + a_0 = 0$
$\Rightarrow p(1) - p(-1) = 2(a_{2007} + a_{2005} + \ldots + a_3 + a_1) = 2008 - 0 = 2008$
$\Rightarrow a_{2007} + a_{2005} + \ldots + a_3 + a_1 = 1004$

Además, por la recurrencia que satisfacen, tenemos que $a_{i+1} = a_{i+2} - a_i$ para $i \in \{0, 1, 2...., 2006\}$, por lo que reemplazando cada término de la última igualdad obtenemos:

$$(a_{2008} - a_{2006}) + (a_{2006} - a_{2004}) + \ldots + (a_4 - a_2) + (a_2 - a_0) = 1004$$

que es una suma telescópica donde la mayoría de los términos se anulan, obteniéndose $a_{2008} - a_0 = 1004$, que es lo pedido.

P3.



a) Sea $ABCD$ paralelógramo.

Los puntos P, Q, R y S son los centros de los cuatro cuadrados $ABGH$, $DAIJ$, $DCLK$ y $CBFE$, respectivamente (ver figura).

Notemos que $PA = DR$ y $AQ = QD$, pues son mitades de la misma diagonal.

Notemos que $\angle ADC$ y $\angle DAB$ son suplementarios por ser $ABCD$ paralelógramo, pero $\angle IAH$ y $\angle DAB$ son también suplementarios pues los $\angle IAD$ y $\angle HAB$ son rectos. Por tanto $\angle ADC = \angle IAH$.

Dado que $\angle RDC = \angle QDA = \angle HAP = \angle QAI = 45$, se tiene $\angle RDQ = \angle QAP$.

Luego $\triangle RDQ \cong \triangle PAQ$ por criterio LAL, por lo que $QR = QP$.

Análogamente se puede probar que $QP = PS$ y $PS = RS$.

Por tanto, $PQRS$ es un rombo.

Dado que $\angle DQR = \angle AQP$ (pues $\triangle RDQ \cong \triangle PAQ$), se concluye sumando el $\angle AQR$ que $\angle PQR = \angle DQA$

Como $\angle DQA$ es recto, $\angle PRQ$ también lo es, y se concluye que $PQRS$ es un cuadrado.

b) Para probar que las diagonales del cuadrado $PQRS$ concurren con las diagonales del paralelógramo $ABCD$, es suficiente probar que una diagonal del cuadrado con una diagonal del paralelógramo se bisectan una a otra. En otras palabras, se probará que las diagonales del cuadrado y las diagonales del paralelógramo comparten todas el mismo punto medio (punto O en la figura).

Notemos que $\angle BAC = \angle ACD$ por ser $ABCD$ paralelógramo, y $\angle PAB = \angle RCD = 45$; por lo que $\angle PAC = \angle RCA$.

Dado que $\angle AOP = \angle COR$ (opuestos por el vértice) y $AP = CR$, se tiene que $\triangle AOP \cong \triangle COR$ por criterio ALA.

Luego $AO = CO$, y $PO = RO$.

Dado que $\overline{DB}$ pasa por el punto medio de $\overline{AC}$ por ser $ABCD$ paralelógramo, y similarmente $\overline{QS}$ pasa por el punto medio de $\overline{PR}$, y dado que $\overline{AC}$ y $\overline{PR}$ tienen el mismo punto medio (punto O); se ha probado que $\overline{AC}$, $\overline{PR}$, $\overline{DB}$ y $\overline{QS}$ son concurrentes (todas pasan por O).

A.2.3. Tercera Fecha

P1. Halle todas las parejas de primos p y q, tales que

$$p(p+q) = q^p + 1$$

P2. Se reúnen dos amigos, Víctor y Sebastián. Víctor dice dos números enteros positivos, uno mayor que mil y otro menor que mil. Sebastián nota que el cuadrado de la razón entre la suma y la diferencia de los números es igual a uno más la razán entre el producto y la suma de los números. ¿Cuál es el menor de estos números?

P3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que cumple:
$f(1) = 2008$
$f(4n^2) = 4f(n^2)$
$f(4n^2 + 2) = 4f(n^2) + 3$
$f(4n(n+1) + 1) = 4f(n(n+1)) + 1$
$f(4n(n+1) + 3) = 4f(n(n+1)) + 4$

Decida si existe m número natural tal que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 + f(1^2) + f(2^2) + \ldots + f(m^2) = 2008m + 251$$

Soluciones

P1. Supongamos $p \leq q$. Como $q \geq 2$ tenemos entonces que:

$$q^p + 1 = p(p+q) \leq 2q^2 \leq q^3 < q^3 + 1$$

Luego $p < 3$, as que $p = 2$ y q ser igual a 3. Supongamos ahora que $p > q \geq 2$ tenemos que

$$2^p + 1 \leq q^p + 1 = p(p+q) =< 2p^2$$

Veamos por inducción que $2^n + 1 < 2n^2$, para $n \geq 7$. Si $n = 7$ tenemos que $2^n + 1 = 129 > 98 = 2n^2$. Supongamos que $2^k + 1 > 2k^2$, luego $2^{k+1} + 1 > 2(2^{k+1} + 1) - 1 > 4k^2 - 1 > 4k^2 - 4 = 2(k+1)(2(k-1))$, pero si $k \geq 4$ entonces $2(k-1) > k+1$. Luego $2^{k+1} + 1 > 2(k+1)(2(k-1)) > 2(k+1)^2$, así queda demostrado el paso inductivo y por lo tanto $2^n + 1 > 2n^2$, para todo $n \geq 7$.
Como $2^p + 1 < 2p^2$, entonces $p \leq 6$. Si $p = 3$ entonces q debe ser 2, y no son solución. Tampoco es solución la pareja $p = 5$ y $q = 2$ ni la pareja $p = 5$ y $q = 3$. Por lo tanto, la única solución es $p = 2$ y $q = 3$.

P2. Sean a y b los dos números $(a > b)$ y sea $\frac{a+b}{a-b} = k$.
Despejando b obtenemos $b = \dfrac{k-1}{k+1}a$ (1).
Si multiplicamos (1) por a obtenemos: $ab = \dfrac{k-1}{k+1}a^2$ (2).
Si a (1) le sumamos a obtenemos: $a + b = \dfrac{k-1}{k+1}a + a = \dfrac{2k}{k+1}a$ (3).
Dividiendo (2) entre (3) obtenemos: $\dfrac{ab}{a+b} = \dfrac{k-1}{2k}a$
Luego de la condición del enunciado tenemos que: $k^2 = 1 + \dfrac{k-1}{2k}a$,
de donde despejando a se obtiene $a = 2k(k+1)$ (4)
que reemplazando en (1) arroja $b = 2k(k-1)$ (5)
Por tanto $a + b = 4k^2$ y $a - b = 4k$ por lo que $4k^2$ y $4k$ son enteros, lo que implica que k es entero.
Como $a > 1000$ y $b < 1000$, de (4) y (5) se concluye por inspección que $k = 22$.
Finalmente $b = 2 \cdot 22 \cdot 21 = 924$.

P3. Llamemos $g(m) = 1^2 + 2^2 + \ldots + m^2 + f(1^2) + f(2^2) + \ldots + f(m^2)$ y $h(m) = 2008m + 251$. Claramente g y h son funciones crecientes. Al ser g exponencial y h lineal, se puede conjeturar que $g(m) > h(m)$ a partir de algún m.

Notemos que $g(1) = 1^2 + f(1^2) = 2009$ y $h(1) = 2008 + 251 = 2259$, entonces

$g(1) < h(1)$.

Notemos que $g(2) = g(1) + 2^2 + f(2^2) = 2009 + 4 + 4f(1) = 10045$ y $h(2) = 2008 \cdot 2 + 251 = 4267$, entonces $g(2) > h(2)$. Como $h(3) = 6275$, entonces también $g(3) > g(2) > h(3)$.

Notemos que $g(4) > f(4^2) = f(4 \cdot 2^2) = 4f(2^2) = 32128$, y como $h(7) = 14307$, entonces $g(7) > g(6) > g(5) > g(4) > h(7) > h(6) > h(5) > h(4)$.

Por último notemos que $g(8) > f(8^2) = f(4 \cdot 4^2) = 4f(4^2) = 128512$, y como $h(45) = 88603$, entonces tenemos (análogo a lo anterior) que la desigualdad $g(m) > h(m)$ es válida para todo $2 \leq m \leq 44$ (considerando también los cálculos anteriores).

Para generalizar, usaremos inducción a partir de $m = 45$. Si la desigualdad es cierta para algún $m \geq 45$ fijo, entonces

$$g(m+1) > g(m) + (m+1)^2 > h(m) + 45^2 > h(m) + 2008 = h(m+1)$$

por lo que la desigualdad también vale para $m + 1$, lo que completa la inducción.

Por tanto no existe m natural tal que $g(m) = h(m)$.

A.2.4. Cuarta Fecha (Recuperativa)

P1. Sea $\triangle ABC$ y un punto D en $\overline{AC}$ de modo que $BD = DC = 3$. Si $AD = 6$ y $\angle ACB = 30$, calcule el $\angle ABD$.

P2. Cada cara de un cubo es coloreada con un color distinto. ¿Cuántos cubos distintos pueden hacerse de esta forma? (*Observación:* Las formas de colorearlo son 6!, pues cada vez que se usa un color en una cara queda uno menos por usar en las otras, pero eso no determina 6! cubos distintos, pues hay coloraciones que sólo difieren en la rotación del cubo en las que no se distingue la diferencia y deben ser consideradas la misma).

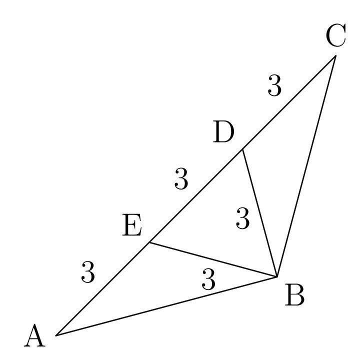
P3. a) Muestre que existen infinitos n (número natural) que cumplen que la suma de las cifras de $11n$ es el doble de la suma de las cifras de n.

b) Muestre que existen infinitos n (número natural) que cumplen que la suma de las cifras de $4n + 3$ es igual a la suma de las cifras de n. (*Indicación:* Quizás le sea de ayuda notar que las cifras 0 no influyen en la suma de cifras).

c) Muestre que para cualquier n (número natural) pueden hallarse n números consecutivos de forma que ninguno sea primo. (*Indicación:* Quizás le sea de ayuda tratar con valores pequeños de n).

Soluciones

P1.



Dado que el $\triangle BDC$ es isósceles de base $\overline{BC}$ y que el $\angle BCD = 30$, entonces $\angle BDC = 120$, por lo que $\angle BDA = 60$. Sea E punto medio de $\overline{AD}$, entonces el $\triangle EDB$ es isósceles de base $\overline{EB}$, y como además $\angle BDA = 60$, entonces es equilátero. Por tanto $\angle DBE = 60$.
Además el $\triangle AEB$ es isósceles de base $\overline{AB}$. Como $\angle AEB = 120$, entonces $\angle ABE = 30$.
Finalmente $\angle ABD = \angle DBE + \angle ABE = 60 + 30 = 90$.

P2. Nombremos los colores como A, B, C, D, E y F. Buscaremos simplificar el problema dividiendo en casos.

Como siempre hay una cara con el color A, tomamos esa cara y la dejamos mirando hacia abajo. Entonces el problema se simplifica a encontrar cuántas coloraciones distintas se pueden hacer coloreando las otras cinco caras y considerando que podemos girar el cubo en torno al centro de su base.

Siempre hay una cara con el color B, la cual tiene dos opciones interesantes posibles con respecto a la de A, que sea opuesta a la A o que sea vecina a la A.

Si es vecina entonces siempre podemos girar el cubo de forma de dejar a la cara B mirando hacia algún punto fijo (por ejemplo que la veamos directamente). Entonces el problema se simplifica a encontrar las coloraciones que se pueden hacer en las otras cuatro caras. Pero esta vez el cubo está fijo, así que la respuesta es $4!$.

Si la cara B es opuesta a A (B mira hacia arriba) entonces consideramos otra cara con color C (que debe ser vecina a A y B) y siempre podemos girar el cubo de forma de ver directamente a C. Entonces el problema se simplifica a encontrar

las coloraciones que se pueden hacer en las otras tres caras. Pero esta vez el cubo está fijo, así que la respuesta es 3!.

Finalmente, como los casos en que B es opuesta a A y B es vecina a A son excluyentes, se tiene por el principio aditivo que el total de combinaciones es $4! + 3! = 30$.

P3.

a) Buscando n pequeño es fácil darse cuenta que todos los números de la forma $n = a0a0a0 \ldots a0a0a0$ satisfacen lo pedido pues $11n = aaaaaa \ldots aaaaaa$, en donde se aprecia que cada cifra 0 se cambia por a, por lo que la suma total de las cifras de $11n$ es el doble de las de n.

b)Buscando n pequeño es fácil darse cuenta que todos los números de la forma $n = 5 \cdot 10^a$ satisfacen lo pedido pues $4n + 3 = 20 \cdot 10^n + 3$, en donde se aprecia que en ambos casos las cifras suman 5.

c) Escojamos n números consecutivos cualesquiera que no partan del 1. Sean éstos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces todos los números de la forma $a_1 a_2 \ldots a_n + a_i$ con i entre 1 y n son consecutivos, y no son primos pues siempre son divisibles por a_i.

Bibliografía

[1] Andreescu, Titu et al. “102 Combinatorial Problems from the Training of the USA IMO team”.

[2] Coxeter, Harold. “Geometry Revisited”. Novena Edición. The Mathematical Association of America. Washington D.C. 1967.

[3] Holanda, Bruno et al.“Treinamento Cone Sul 2007”.

[4] Lozansky, Edward et al. “Winning Solutions”. Springer-Verlag. New York 1996.

[5] Maxell, E.A. “Geometry for Advanced Pupils”. Cuarta Edición. University Press. Oxford, 1960.

[6] Olimpíada Mexicana de Matemáticas. “Geometría”.
http://ommcolima.ucol.mx/guias/Geometria.pdf

[7] Sominski, I. S. “Método de Inducción Matemática”. Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú, 1985.

[8] Engel, Arthur. “Problem Solving Strategies”. Editorial Springer. Nueva York.

Autores

- **Temario**

  Sebatián Henríquez Acosta

  Víctor Verdugo Silva

- **Geometría**

  Daniel Contreras Salinas

  Felipe Contreras Salinas

  Sebastián Illanes Carrasco

- **Teoría de Números**

  Cristóbal Parraguez Cruzat

  Aníbal Velozo Ruiz

- **Álgebra**

  Felipe Contreras Salinas

  Juan Contreras Garrido

  Estefanía Vidal Henríquez

- **Combinatoria y Otros**

  Felipe Contreras Salinas

  Andrés Iturriaga Jofré

  Sebastián Henríquez Acosta